Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 13 January 1970 No. 1

[The Research Journal of the Hindi Science Academy]

Vijnana Parishad, Thorn Hill Road, Allahabad, India.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 13 | जनवरी 1970 | संख्या 1

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No I, January 1970, Pages 1-11

परमाणु ऊर्जा का भारत के विकास में योगदान*

डा० जगदीश शंकर
भाभा एटॉमिक रिसर्च सेन्टर, ट्राम्बे, बम्बई

मित्रो !

1940 ई० की न्यूक्लीय विखंडन की खोज ने मानव जाति के हाथ में ऊर्जा का एक ऐसा असाधारण स्रोत प्रदान किया है जो उस काल तक समस्त शक्ति स्रोतों से कहीं अधिक शक्तिशाली था। यद्यपि संसार को इस तथ्य की जानकारी बड़े ही नाटकीय ढंग से सन् 1945 के हिरोशिमा के दुर्भाग्यपूर्ण बम-विस्फोट से मिली, तथापि इस ऊर्जा को नियंत्रित रूप में न्यूक्लीय भट्टियों (nuclear reactors) में प्राकृतिक यूरेनियम, संवृद्ध यूरेनियम-235, यूरेनियम-233, तथा प्लूटोनियम के विखंडन से प्राप्त किया जा सकता है।

चाहे जिस प्रकार की न्यूक्लीय भट्टी हो, सबके द्वारा विखंडन से प्राप्त ऊष्मा को भाप बनाने के काम में लाया जा सकता है, जिसको इच्छानुसार टरबाइन द्वारा विद्युत बनाने तथा पानी का जहाज चलाने के काम में ला सकते हैं। इन न्यूक्लीय भट्टियों से उपजात के रूप में काफी बड़ी मात्रा में रेडियोऐक्टिव समस्थानिकों (radioactive isotopes) की प्राप्ति होती है जिनका उपयोग चिकित्सा, कृषि, उद्योग तथा आधारभूत अनुसंधान में किया जाता है। मैं आज की इस वार्ता में परमाणु ऊर्जा के इन्हीं दो पहलुओं की चर्चा करूँगा जिनका मेरे विचार में भारत के भविष्य के विकास में अत्यन्त महत्वपूर्ण योगदान होगा।

भारत में कृषि तथा उद्योग के विकास के लिये कई कदम उठाये गये हैं परन्तु यदि हम प्रति व्यक्ति द्वारा उपभुक्त विद्युत ऊर्जा को मापदंड मान कर विदेशों से तुलना करें तो हमें ज्ञात होगा कि हम अमरीका से ही नहीं अपितु योरप के भी सभी देशों से पिछड़े हुए हैं। इसका अंशतः एक कारण यह भी है कि उत्पादन-वृद्धि से प्राप्त लाभ जनसंख्या की तीव्र वृद्धि के कारण निष्फल सिद्ध हुए हैं। अतः मैं कृषि तथा औद्योगिक विकास में सस्ती न्यूक्लीय ऊर्जा को जिस प्रकार काम में लाया जा सकता है उसकी चर्चा करूँगा।

हमें ज्ञात है कि सबसे सस्ता ऊर्जा का स्रोत जल विद्युत है। परन्तु लगभग सभी संभव तथा सुलभ स्रोतों से विद्युत बनाई जा चुकी है। यदि हम ऊर्जा की उत्पत्ति के लिये जीवाश्म ईंधन (Fossil fuels)

*3 जनवरी, 1970, को खड़गपुर में आयोजित 57वें साइंस कांग्रेस के अवसर पर विज्ञान परिषद् अनुसंधान गोष्ठी के समक्ष दिया गया अध्यक्षपदीय भाषण

का प्रयोग करें तो कुछ ही वर्षों में हमारा कोयले का भंडार समाप्तप्राय हो जावेगा। इसके अतिरिक्त कोयले की आवश्यकता धातुकर्म तथा अन्य बहुतेरे उद्योगों में भी होती है। यदि कोयला अधिक मात्रा में उपलब्ध हो तो भी खदानों से विद्युतघरों तक इसका परिवहन आज की परिस्थितियों में संभव नहीं है। भविष्य में अधिक धन व्यय करके, नई रेल पटरियाँ एवं रेल डिब्बे इत्यादि बनाने पर भी यह परिवहन शायद ही संभव हो सके।

हम यह जानते हैं कि यदि न्यूक्लीय विद्युतघरों को खदान से लगभग 800 किलोमीटर या अधिक दूरी पर बनायें तो इससे प्राप्त विद्युत की लागत वहाँ पर कोयले से प्राप्त विद्युत की लागत के सम-स्तर होगी। ज्यों-ज्यों इस नई तकनीक का विकास हो रहा है त्यों-त्यों न्यूक्लीय विद्युत और भी सस्ती होती जा रही है। आशा है कि बड़े-बड़े न्यूक्लीय विद्युतघर बन जाने पर यह विद्युत जलविद्युतघरों से प्राप्त विद्युत के बराबर सस्ती हो सकेगी। अभी तक इतने बड़े (10 लाख किलोवाट) विद्युतघर न बनाये जाने का एक कारण यह भी है कि देश में इस उच्च क्षमता के ग्रिड (grid) नहीं हैं। भारत में सबसे बड़ी ग्रिड की क्षमता 25 लाख किलोवाट है (सारणी 1)। स्पष्ट है कि इस ग्रिड में एक 10 लाख किलोवाट की अतिरिक्तइकाई का लगाना कठिन होगा। ऐसी परिस्थिति में सस्ती न्यूक्लीय-विद्युत दूर-संचारण में मँहगी हो जाती है। न्यूक्लीय विद्युतघर की स्थापना तभी एक आकर्षक प्रस्ताव बन सकती है जब उससे उत्पन्न अधिकांश विद्युत का उपयोग आसपास के क्षेत्रों में स्थापित उद्योगों में हो सके।

सारणी 1

बड़े ग्रिडों के आकार

क्रम संख्या	ग्रिड का नाम	क्षमता, Mwa
1.	दक्षिणी बिहार, निचला बंगाल	2421
2.	गुजरात शक्ति प्रणाली	619
3.	केरल शक्ति प्रणाली	547
4.	मद्रास शक्ति प्रणाली	1540
5.	महाराष्ट्र शक्ति प्रणाली	1307
6.	मैसूर शक्ति प्रणाली	702
7.	हीराकुड	526
8.	भाखरा नंगल	1208
9.	उत्तर प्रदेश शक्ति प्रणाली	1405

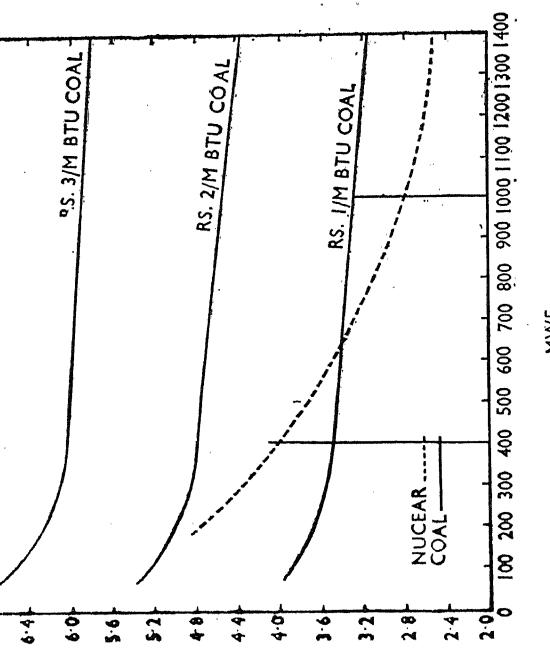
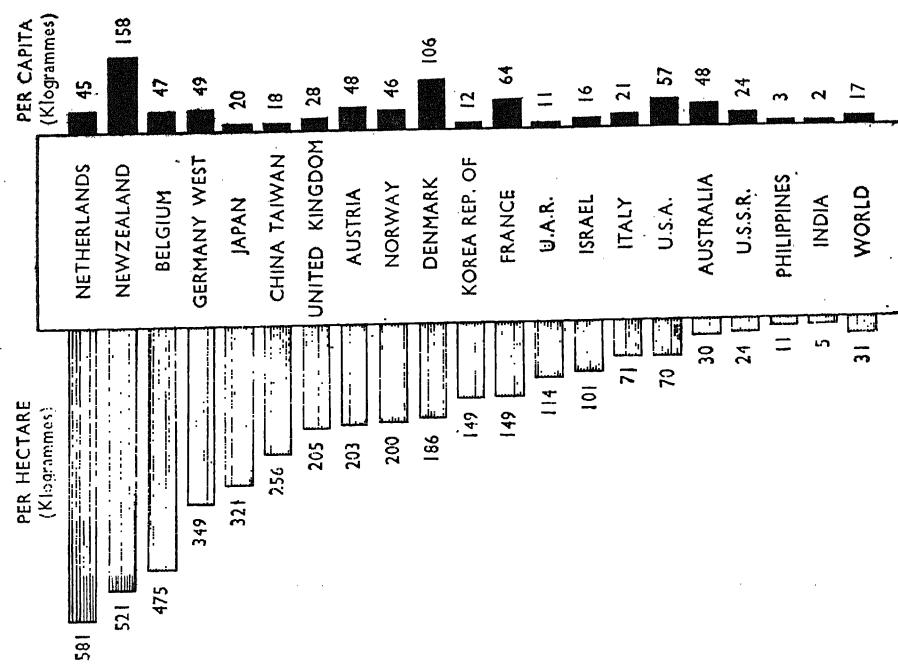
भारत की कृषि मूलतः मानसून पर निर्भर है। वर्षा के शीघ्र या देर से आने से फसल की हानि होती है। कभी-कभी तो वर्षा की कमी के कारण अकाल पड़ जाता है। दूसरी ओर अधिक वर्षा बाढ़ का कारण बनती है। भारत के कई क्षेत्र ऐसे हैं जहाँ की भूमि उपजाऊ तो है किन्तु वर्षा की कमी के कारण

या तो बिल्कुल उपज नहीं होती या वर्षा में केवल एक ही फसल हो पाती है। ऐसे क्षेत्रों के उदाहरण पश्चिमी उत्तर प्रदेश तथा पूर्वी राजस्थान हैं। कुछ ऐसे भी प्रदेश हैं जहाँ पर कम वर्षा तथा पानी की कमी के कारण पैदावार नहीं के बराबर होती है। ऐसे प्रदेशों में गुजरात का उत्तरी भाग, तामिलनाड, आँध्र प्रदेश तथा बिहार के कुछ भाग सम्मिलित किये जा सकते हैं। अतः भारत के अधिकतर क्षेत्रों में अनिश्चित वर्षा तथा पुराने ढंग से खेती करने के कारण भारत का कृषि-उत्पादन अन्य देशों की तुलना में बहुत कम है। 32·6 करोड़ हेक्टर भूमि में से लगभग एक तिहाई बंजर पड़ी है। दूसरे तिहाई भाग में खेती होती है परन्तु इसमें से 2·6 करोड़ हेक्टर में ही सिंचाई के साधन उपलब्ध हैं (सारणी 2)। इससे यह विदित होता है कि यदि उपयुक्त सिंचाई का प्रबन्ध किया जा सके तो अधिक उत्पादन संभव है। परमाणु ऊर्जा इस विषय में एक भव्य योगदान कर सकती है।

सारणी 2

प्रति हेक्टर उपज (किग्रा०) 1965-66

फसल	भारत	संयुक्त अरब गणराज्य	संयुक्त राज्य अमरीका	जापान
धान	1310	4180	4770	4950
	(1)	(3·19)	(3·63)	(3·78)
गेहूँ	910	2770	1790	2700
	(1)	(3·04)	(1·97)	(2·96)
मक्का	990	3030	4630	
	(1)	(3·06)	(4·78)	...

खारे पानी से मीठे पानी बनाने की एक आकर्षक विधि आसवन है। इस विधि में कम ताप की भाप का उपयोग किया जाता है। ऐसी भाप आधुनिक तापविद्युत (thermo electric) घरों के टरबाइनों से प्रचुर मात्रा में निकलती है। इन विद्युतघरों में उच्च ताप की भाप टरबाइन (turbine) को चला कर विद्युत पैदा करने के काम में आती है। जैसे-जैसे भाप टरबाइन में से होकर गुजरती है उसका ताप गिरता जाता है और यह क्रम तब तक चालू रखा जाता है जब तक कि भाप का ताप इतना कम न हो जाए कि उसको खारे पानी के आसवन में प्रयोग में लाया जा सके। इस प्रकार इन सब प्रक्रियाओं के एक ही संयंत्र (plant) में साथ-साथ चलने के कारण मीठे पानी का उत्पादन काफी सस्ता पड़ता है। यह अनुमान लगाया गया है कि समुद्र के जल से, कारखानों में काम में लाये जाने वाले तथा कृषि के लिये उपयोगी जल का उत्पादन $2\frac{1}{2}$ से 3 रुपये प्रति एक हजार गैलन की दर से किया जा सकता है। मीठे पानी के उत्पादन की यह दर अभी कच्छ में बनाये गये मीठे पानी की दरों (4 से 5 रुपये प्रति एक हजार गैलन) से सस्ती है। इस बात से यह सिद्ध होता है कि यदि सौराष्ट्र प्रदेश में एक ऐसा ही संयंत्र लगा दिया जाय तो इस प्रदेश में मीठा पानी सस्ते दामों पर बनाया जा सकता है तथा सौराष्ट्र की विशाल तथा बंजर भूमि को फसल से लहलहाया जा सकता है।

चित्र 1. पादप पोषणों की प्रति हेक्टर प्रति व्यक्ति पीछे उपयुक्ति

RS. 4/M BTU COAL
RS. 3/M BTU COAL
RS. 2/M BTU COAL
RS. 1/M BTU COAL
NUCEAR
COAL
8·8 8·4 8·0 7·6 7·2 6·8 6·4 6·0 5·6 5·2 4·8 4·4 4·0 3·6 3·2 2·8 2·4 2·0
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000 1100 1200 1300 1400
MWE

स्टेशन आकार,

चित्र 2. ऊर्जा मूल्य Vs केन्द्र का आकार

पश्चिमी उत्तर प्रदेश तथा पूर्वी राजस्थान की स्थिति भिन्न है। यहाँ की भूमि उपजाऊ तो है परन्तु वर्षा पर निर्भर है। अनिश्चित वर्षा तथा वर्ष में अधिकतर सूखा पड़ने के कारण उत्पादन बहुत कम है। हाल ही में यह पता चला है कि इस क्षेत्र के भूगर्भ में एक विशाल झील है जो सम्भवतः विश्व में सबसे अधिक पानी देने की क्षमता रखती है। ऐसा अनुमान है कि पृथ्वी के धरातल से लगभग सौ-दो सौ फीट की गहराई से काफी मात्रा में कृषि के लिये जल की उपलब्धि हो सकती है। इसके लिये पम्प की आवश्यकता होगी और पम्प को चलाने के लिये विद्युत की।

हम देखेंगे कि इस तरह यदि इन क्षेत्रों में सस्ती विद्युत उपलब्ध हो तो पश्चिमी उत्तर प्रदेश तथा उत्तर पश्चिम सौराष्ट्र के अधिकतर क्षेत्रों में न केवल फसल पैदा की जा सकती है अपितु जल-पूर्ति के कारण कृषि-उत्पादन अधिक मात्रा में किया जा सकता है। अधिक उत्पादन तथा फसल के आवर्तन के लिये अधिक मात्रा में उर्वरक की आवश्यकता होती है। 1951 तक भारत ने बहुत थोड़ी मात्रा में रासायनिक उर्वरकों का उत्पादन किया। इसके बाद बहुत से नये संयंत्र लगाये गये हैं। इस समय इन समस्त संयंत्रों की क्षमता लगभग 8 लाख टन नाइट्रोजन और लगभग $2\frac{1}{2}$ लाख टन फास्फेट (P_2O_5) उर्वरक बनाने की है। भारत में उर्वरक की उपभुक्ति बहुत कम है तथा संसार की औसत उपभुक्ति का केवल 16 प्रतिशत है (चित्र 1)। ऐसी योजना है कि देश में 24 लाख टन नाइट्रोजन और 10 लाख टन फास्फेट से युक्त उर्वरक बनाया जाये। इस लक्ष्य की पूर्ति के बाद भी भारत में उर्वरकों की उपभुक्ति संसार की औसत उपभुक्ति का केवल 30 प्रतिशत ही होगी। अतः भारत में उर्वरक उद्योग के विकास की महती सम्भावनायें हैं तथा भविष्य में आत्मनिर्भरता के लक्ष्य को प्राप्त करने के लिये यह अत्यन्त आवश्यक भी है। भारत सरकार ने इन बड़े विद्युतघरों की उपयोगिता के प्रति जागृत रहते हुए ट्राम्बे में स्थित भाभा परमाणु अनुसन्धान केन्द्र के द्वारा ऊपर वर्णित कच्छ प्रदेश तथा गंगा यमुना के समतल मैदानों में इस तरह के विद्युतघरों की स्थापना के बारे में वित्तीय अध्ययन शुरू किया है। इस अध्ययन द्वारा ज्ञात हुआ है कि गंगा यमुना की समतल भूमि से नल कूप द्वारा जल के निष्कासन के लिये विद्युत की लागत ८ पैसे प्रति किलोवाट घंटा की दर से 1000 गैलन के लिए 15 पैसे होगी। दूसरी ओर समुद्र के पानी को मीठे पानी में बदलने में लगभग 3 रुपये प्रति एक हजार गैलन की लागत आयेगी। जल के उत्पादन की इस उच्च लागत को देखते हुए यह आवश्यक हो जाता है कि वितरण के समय वाष्पीकरण द्वारा पानी के क्षय को न्यूनतम किया जावे। किन्तु इतनी उच्च लागत पर प्राप्त होने पर भी कृषि योग्य पानी महँगा नहीं पड़ेगा यदि एक वर्ष में तीन फसलें उपजाई जायें। इस तरह से यदा-कदा जल आवश्यकता की पूर्ति एक बड़ा ही आकर्षक प्रस्ताव है।

कच्छ क्षेत्र में 10 लाख किलोवाट क्षमता का विद्युत घर स्थापित करने से लाखों एकड़ भूमि कृषि योग्य बनाई जा सकती है। काँदला बंदरगाह के समीप होने से यह प्रस्ताव और भी आकर्षक प्रतीत होता है क्योंकि बाहर से खनिज फास्फेट जैसे कच्चे माल का आयात तथा देश-विदेशों को बने हुये अतिरिक्त उर्वरकों आदि का निर्यात आसानी से संभव होगा। इस अध्ययन से ज्ञात हुआ है कि ऐसे एक विद्युत घर द्वारा एक वर्ष में लगभग 4·7 लाख टन नाइट्रोजन, 3·3 लाख टन फास्फेट (P_2O_5) 55 हजार टन ऐल्यूमीनियम तथा प्रतिदिन 15 करोड़ गैलन मीठा पानी बनाया जा सकता है। इन सब पर लगभग

600 करोड़ रुपये का व्यय होगा (सारणी 3)। मीठे पानी को प्रयोग में लाकर बड़े बड़े खेत प्रतिवर्ष 1·9 लाख टन धान्य, 3·9 लाख टन आलू तथा 46 हजार टन मूँगफली का उत्पादन कर सकेंगे। इसके अतिरिक्त उद्योगों द्वारा भी 70 करोड़ रुपये का लाभ हो सकेगा (सारणी 4)।

सारणी 3 : शस्य-औद्योगिक काम्प्लेक्स

(कच्छ-सौराष्ट्र क्षेत्र में लागत)

संयंत्र	क्षमता	लागत, करोड़ रुपयों में	
		विदेशी विनिमय	योग
द्वयर्थक संयंत्र	1200 MWe 150 MGD	75·6	370.4
उर्वरक*	5330 Te/दिन	49·24	180·12
ऐल्युमिनियम संयंत्र	150 Te/दिन	17·494	38·687
औद्योगिक काम्प्लेक्स के लिये योग		142·334	598·207

*अमोनिमम नाइट्रेट, डाइअमोनियम फासस्फेट, ट्रिपल सुपरफासफेट क्रमशः 3330 Te/दिन, 1000 Te/दिन, 1000 Te/दिन

सारणी 4

कृषि-औद्योगिक काम्प्लेक्स (कच्छ सौराष्ट्र क्षेत्र)

योजना का कृषि अर्थशास्त्र

सिंचित होने वाला क्षेत्रफल	
तिहरी फसल	9,200 हेक्टर
एक फसल	38,400 ,,
कृषि उत्पादन	
संकर मक्का	192,000 टन
आलू	390,000 ,,
मूँगफली	46,000 ,,
उर्वरक उत्पाद	
स्थिर N_2 के रूप में नाइट्रोजन	447,000 ,,
P_2O_5	331,000 ,,
काम्प्लेक्स में उपयुक्त उर्वरक	
स्थिर N_2 के रूप में नाइट्रोजन	3,900 ,,
P_2O_5	3,100 ,,
योजना से पूर्ण लाभ	रु० 136·7 दशलक्ष

इसी प्रकार से गंगा तथा यमुना के समतली मैदान के अध्ययन से पता चला है कि यदि 430 करोड़ रुपयों का व्यय किया जाए तो प्रतिवर्ष 6·4 लाख टन उर्वरक और 50 हजार टन ऐल्यूमीनियम का उत्पादन संभव होगा (सारणी 5)। इसके अतिरिक्त भूगर्भीय जल से 7·2 लाख हेक्टर भूमि की सिंचाई हो सकेगी जिससे 45 लाख टन धान्य एवं 7 लाख टन दालें उत्पन्न हो सकेंगी (सारणी 6)।

सारणी 5

कृषि औद्योगिक काम्प्लेक्स

(पश्चिमी सिन्धु-गंगा क्षेत्र)

लागत मूल्य

संयंत्र	क्षमता	मूल्य, करोड़ रुपयों में	
		विदेशी विनिमय	योग
न्यूक्लीय द्वीपसमूह	1200 MWe	31·600	158·000
बिजली संयंत्र		13·400	67·000
शक्ति संयंत्र योगफल	1200 MWe	45·000	225·000
उर्वरक*	4475 Te/ दिन	44·911	166·283
ऐल्यूमीनियम संयंत्र	150 Te/ दिन	17·494	38·687
औद्योगिक काम्प्लेक्स का पूर्ण योगफल		107·405	429·970

*अमोनियम नाइट्रेट 3200 Te/दिन, डाइअमोनियम फास्फेट 1275 Te/दिन

सारणी 6

कृषि औद्योगिक काम्प्लेक्स

(सिंधु-गंगा का मैदान)

योजना का कृषि अर्थशास्त्र

सिंचित होने वाला क्षेत्रफल		720,000	हेक्टर
नलकूपों की संख्या		36,000	,,
उत्पाद (अतिरिक्त)			
धान्य		4·5	दशलक्ष टन
दालें		0·7	,,
योजना से पूर्ण लाभ	रु०	2512	दशलक्ष
उर्वरक की आवश्यकता			
स्थिर N_2 के रूप में नाइट्रोजन		166,000	टन
P_2O_5		83,000	,,
वेधने में कुल लागत	रु०	432	दशलक्ष
प्रति हेक्टर कुल लाभ	रु०	3767	,,

औद्योगिक क्षेत्र में इससे 57 करोड़ रुपये की वार्षिक आय तथा कृषि क्षेत्र में लगभग 213 करोड़ रुपये की वार्षिक आय संभव होगी। इस प्रकार उर्वरक और औद्योगिक पदार्थों का उत्पादन स्थानीय आवश्यकताओं से कहीं अधिक होगा और यह अतिरिक्त उत्पादन देश के दूसरे भागों में काम आ सकेगा।

यहाँ पर यह कहना उपयुक्त होगा कि उल्लिखित आकलनों (estimates) का आधार यह है कि नाइट्रोजनयुक्त उर्वरक विद्युतअपघटन क्रिया द्वारा तथा फास्फोरस युक्त उर्वरक विद्युततापीय क्रिया द्वारा बनाये जायेंगे। यह और भी सस्ता पड़ सकता है यदि उत्पादन एक बड़े पैमाने पर किया जाये। इन क्षेत्रों में ऐल्यूमीनियम उद्योगों की स्थापना के बारे में भी विचार किया गया है क्योंकि इस उद्योग में अधिक मात्रा में ऊर्जा का उपयोग होता है। ऐल्यूमीनियम के प्रति टन उत्पादन के लिये 18 से 20 हजार किलोवाट घंटा ऊर्जा की आवश्यकता होती है। इस उद्योग की स्थापना का एक कारण यह भी है कि भारत में ऐल्यू-मीनियम खनिज ,बाक्साइट, प्रचुर मात्रा में उपलब्ध है तथा इस धातु को ताँबे के स्थान पर विद्युत उद्योगों में काम में लाया जा सकता है। अतिरिक्त ऊर्जा का उपयोग ऐसे दूसरे उद्योगों की स्थापना में भी किया जा सकता है जो अधिक ऊर्जा का उपभोग करते हों। उदाहरणतः कास्टिक सोडे का विद्युतअपघटनी उत्पादन। इन सब तथ्यों से यह विदित होता है कि यदि किसी बड़े न्यूक्लीय विद्युत घर के चारों ओर औद्योगिक काम्प्लेक्स (industrial complex) तथा कृषि उद्योग (agricultural industry) खड़े किये जायें तो यह देश की आर्थिक उन्नति तथा सर्वोन्मुखी विकास में अत्यधिक सहायक तथा लाभदायक सिद्ध हो सकते हैं। इस संकल्पना के अन्तर्गत विद्युतघर के परिमाण की कोई सीमा निर्धारित नहीं है क्योंकि इस की कोई आवश्यकता नहीं कि विद्युत का परिवहन एक जगह से दूसरी जगह किया जाये। राजस्थान में स्थापित की जा रही न्यूक्लीय भट्टी के समान अनेक परिमाणों की भट्टियों से उत्पादित विद्युत की कीमतें तुलना करने से यह ज्ञात होता है कि न्यूक्लीय विद्युत का मूल्य 2·8 पैसे प्रति किलोवाट घंटा है जबकि कोयले से चालित विद्युतघर से प्राप्त विद्युत का मूल्य · 2 पैसे प्रति किलोवाट घंटा पड़ता है (कृपया चित्र 2, पृष्ठ 4 पर देखें)।

कृषि में वृद्धि होने के साथ साथ यह भी आवश्यक हो जाता है कि अन्न को खेतों में बीमारी से तथा संग्रहण के समय अनेक जीवाणुओं से भी बचाया जाये। परमाणु शक्ति का उपयोग कृषि-उत्पादन में वृद्धि तथा कृषि में होने वाली हानियों से बचाने में भी किया जा सकता है। पौधों की कई बीमारियों एवं कृन्तक प्राणियों (चूहे, इत्यादि) के खेतों में उत्पात के कारण धान्य की काफी हानि होती है। कुछ अनुमानों के अनुसार तो हम हर वर्ष लगभग 80 लाख टन तक अनाज खेतों में ही खो देते हैं। इसके अतिरिक्त 20 से 30 लाख टन संग्रहण के समय नष्ट हो जाता है। अनाज का उत्पादन रोग प्रतिरोधक तथा अच्छी उपज देने वाले बीजों के उपयोग एवं नवीन कृषि प्रणालियों तथा प्रचुर मात्रा में उर्वरक के प्रयोग पर भी निर्भर करता है।

भोज्य पदार्थों का शीघ्र सड़ना एक अन्य महत्वपूर्ण समस्या है जिस पर ध्यान देना तथा जिसको ठीक तरह से सुलझाना अत्यन्त आवश्यक है। भोज्य पदार्थों के सड़ने-गलने के कारणों में फसल काटने के पुराने तरीके तथा सब्जियों, फलों, मछलियों, मुर्गी के अण्डों तथा माँस से बने हुए पदार्थों का परिवहन तथा

संरक्षण सम्मिलित हैं। इन पदार्थों के सभी गुण तथा विशेषताएँ उपभोक्ता तक पहुँचते-पहुँचते प्रायः नष्ट हो चुकी होती हैं । देश में हिमीकरण तथा प्रशीतन भंडारों की भी बड़ी कमी है ।

परमाणु ऊर्जा का लाभदायक उपयोग ऊपर दी हुई सभी परिस्थितियों का सामना करने तथा कृषि उत्पादन तथा अनाज के परिरक्षण के समय उसे सड़ने-गलने से बचाने के लिये किया जा सकता है ।

उत्परिवर्तन प्रजनन

कृषि के क्षेत्र में परमाणु ऊर्जा का लाभदायक तथा मुख्य उपयोग फसल में सुधार है, यथा नये प्रकार के रोग प्रतिरोधक बीज, मजबूत और छोटे तृण, उत्तम खाद्यमान, तथा प्रति एकड़ अधिक उपज पैदा करना । रूढ़िवादी वरण (selection) एवं संकरण (cross breeding) की विधियाँ अत्यन्त जटिल तथा समय लेने वाली हैं । इनमें कुछ चुने हुये स्कन्धों से संकरण तथा वरण पर प्रजनन निर्भर होता है । यद्यपि संचय विकिरण द्वारा उत्परिवर्त्तन प्रजनन की प्रकृति पर निर्भर करता है तथापि इसमें प्रजनन की दर अधिक होने के कारण दुर्लभ सफलता की अधिक संभावना होती है ।

ट्राम्बे में परमाणु भट्टियों के प्रारम्भ होने से कई अधिक उपज वाले धान व मूँगफली के विभेदों का उद्भव हो सका है तथा इन्हें अब दूसरे अनुसन्धान केन्द्रों में प्रयोगों के लिये भेजा गया है । उत्परिवर्तित धानों की एक किस्म ने साधारण धानों की तुलना में 45 से 60 प्रतिशत अधिक उपज दी है । एक और दूसरी किस्म TR-1 साधारण धानों की तुलना में तीन सप्ताह पहले ही पक गई । ये उत्परिवर्त्तक आज कई प्रदेशों में परखे जा रहे हैं ।

दूसरे आर्थिक वर्ग में मूँगफली का एक नया फली उत्परिवर्त्तक प्राप्त किया गया है । यद्यपि इसमें प्रति भार इकाई में तेल की मात्रा उतनी ही रहती है परन्तु गिरी का भार 20 से 40 प्रतिशत बढ़ जाने के कारण तेल की कुल प्राप्ति कहीं अधिक होती है ।

धान्यों का विसंक्रमण

जैसा कि पहले कहा जा चुका है देश की दूसरी समस्या खाद्यान्नों का संग्रहण के समय जीवाणुओं द्वारा नष्ट होना है । इस सम्बन्ध में विकिरणन द्वारा विसंक्रमण के प्रयत्न उल्लेखनीय हैं । कीटाणु संग्रहीत धान्यों, आटे एवं दालों को अत्यन्त हानि पहुँचाते हैं । रासायनिक धूमन बड़े कीटों के लिये तो काफी विनाशकारी होता है परन्तु छोटे कीटों तथा उनके अण्डों पर इसका कोई प्रभाव नहीं होता । दूसरी ओर गामा विकिरण का प्रयोग रासायनिक धूमन की तुलना में काफी उपयोगी होता है क्योंकि यह केवल कीटों का विनाश ही नहीं करता, अपितु अण्डों को भी पूरी तरह से विनष्ट कर देता है और किसी प्रकार का विषैला अवशेष भी नहीं छूटता । इसी कारणवश जीवाणुनाशन तथा कीट निरोध के पहलुओं को ट्राम्बे में काफी महत्वपूर्ण स्थान दिया गया है । यहाँ पर दो मुख्य स्रोत लगाये गये हैं । ये हैं 100,000 क्यूरी का पैकेज विकिरणक तथा 28,000 क्यूरी का पूर्ण प्रवाह विकिरणक । पहला यंत्र मछली, फल, तथा सब्जियों के विकिरणन के

काम आता है और इसकी क्षमता 100 पौण्ड प्रति घंटा है, जबकि दूसरे यन्त्र में 500 पौण्ड प्रति घंटे के हिसाब से धान्य का विकिरणन किया जा सकता है।

नष्ट होने वाले भोजन का परिरक्षण

नष्ट होने वाले अनेक प्रकार के भोजनों के विकिरणन से परिरक्षण की अनेक सम्भावनाएँ उल्लेखनीय हैं। विकिरण परिरक्षण के तकनीकी पहलुओं का गहन अध्ययन किया जा चुका है और यह सिद्ध हो गया है कि यह एक अत्यन्त लाभदायक तथा व्यवहार में लाने योग्य विधि है। इस तकनीक का मुख्य लाभ इस सिद्धांत पर आधारित है कि आयनन-विकिरण की थोड़ी सी मात्रा ही सूक्ष्मजीवों, परजीवियों तथा अन्य प्रकार के कीटों का विनाश करने में समर्थ है तथा विकिरण का प्रयोग करते समय ताप में कोई विशेष वृद्धि नहीं होती। आयनन-विकिरण के अधिक अन्तर्भेदी होने के कारण संकुलन करने के बाद भी पदार्थों का विकिरणन करके संरक्षण कर पाना इस तकनीक का एक अतिरिक्त लाभ है। इस क्रिया द्वारा कच्चे भोज्य पदार्थों का भी संरक्षण किया जा सकता है। अतः यह स्पष्ट है कि इस तकनीक ने खाद्य पदार्थों के संरक्षण में संसाधन (processing), परिवहन (transportation), संग्रह तथा विक्रय में नई दिशाएँ तथा लोच देकर अनेक आर्थिक लाभ प्रदान किये हैं।

भारत में हम मुख्यतः कोबाल्ट-60 (Co^{60}) को विकिरण के स्रोत के रूप में लाते हैं क्योंकि यह हमारी न्यूक्लीय भट्टियों से प्रचुर मात्रा में प्राप्त होता है तथा न्यूक्लीय विद्युतघरों के भविष्य के कार्यक्रमों से और भी अधिक आसानी से इसकी प्राप्ति हो सकेगी। इस समस्थानिक से स्फुटित गामा किरणें अति अन्तर्भेदी होती हैं जिसके कारण वे स्थूल विकिरणन में अत्यन्त उपयोगी हैं। विकिरण के इस स्रोत से सम्बन्धित शिल्प विज्ञान (technology) पूर्णतया विकसित हो चुका है तथा इसके एक बार स्थापित हो जाने एवं जैविक रक्षण और उत्पाद परिवहन क्रियाविधि के पूर्ण हो जाने के बाद विशेषज्ञों द्वारा लगातार ध्यान रखने की बहुत कम आवश्यकता पड़ती है।

भोजन विकिरणीयन के परिणाम

अनेक प्रयोगों द्वारा यह स्थापित हो गया है कि विविध प्रकार के मांस जैसे बेकन (bacon), हैम (ham), मुर्गी (chicken) इत्यादि का विकिरण द्वारा जीवाणुहनन करके कमरे के ताप पर, गुणों में बिना अधिक निम्नीकरण किये हुये, लगभग एक वर्ष तक संग्रहण किया जा सकता है। आलू, प्याज तथा लहसुन का अंकुरण रोका जा सकता है तथा कई प्रकार की सद्यः पकड़ी हुई मछलियों, ताजे फलों तथा सब्जियों का शेल्फ-जीवन (shelf life) बढ़ाया जा सकता है। उन जीवाणुओं का भी विकिरण द्वारा हनन किया जा सकता है जो फलों को सड़ाते हैं। इन सब लाभों के अतिरिक्त कुछ परिस्थितियों में ऐसा भी पाया गया है कि विकिरण परिरक्षण उत्पाद के गुणों को अच्छा बनाने में सहायक होता है।

पशुओं (चूहे, कुत्ते तथा बन्दर इत्यादि) पर लम्बे समय तक प्रयोगों के फलस्वरूप यह स्थापित किया जा चुका है कि विकिरण द्वारा परिरक्षित कई प्रकार के भोज्य पदार्थ मानवीय उपभोग के लिये निरापद है। संतुलित तथा पौष्टिक भोजन के विभिन्न अवयवों पर विकिरण के प्रभाव के अध्ययन ने यह दर्शाया है

कि इस क्रिया द्वारा अधिकतर अवयवों, जैसे प्रोटीन, शर्करा जाति के पदार्थ (carbohydrates) तथा वसा (fat) पदार्थों, में किसी प्रकार की हानि नहीं होती है। यद्यपि विटामिनों की मात्रा में थोड़ी सी कमी अवश्य आ जाती है परन्तु यह कमी भोजन संसाधन (food processing) के अन्य उपायों जैसे डिब्बा बन्दी (canning), शुष्कन (dehydration) तथा पकाने आदि की तुलना में अधिक नहीं होती।

ट्राम्बे में किये गये अब तक के परीक्षणों के परिणामों से पता चला है कि थोड़ी सी विकिरण मात्रा से ही प्याज तथा लहसुन का शैल्फ-जीवन 6 से 7 माह तक बढ़ाया जा सकता है। यह तकनीक आम तथा केले जैसे फलों के पकने में देरी करने के लिये भी प्रयोग में लाई गई है। विकिरण की कम मात्रा तथा मन्द ऊष्मा उपचार के एक साथ प्रयोग करने से आम, चीकू, अमरूद, मटर इत्यादि का जीवाणुहनन करके बाजार में प्राप्त फलों की तुलना में उन्हें काफी गुणकारी बनाया जा सकता है। खमीर (mold) के कारण चपाती तथा ब्रैड के सड़ने को भी विकिरण द्वारा रोका जा सकता है और ये पदार्थ प्लास्टिक के बन्द थैले में 10 से 50 दिन तक बिना किसी क्षय के रखे जा सकते हैं।

ट्राम्बे के कुछ परीक्षणों के आधार पर विकिरण परिरक्षण के आर्थिक पहलुओं पर भी अध्ययन किया गया है। ऐसा प्रतीत होता है कि विकिरण परिरक्षण का व्यय परम्परागत विधियों की तुलना में अधिक नहीं होगा। कुछ विशेष परिस्थितियों में तो प्रचालन की सुविधाओं के मापक्रम (scale of operational facilities) को ध्यान में रखते हुए विकिरण परिरक्षण ही अधिक सस्ता पड़ेगा। मूल्यों की तुलना करते समय इस बात का विशेष रूप से ध्यान रखा जाना चाहिये कि सबसे महत्वपूर्ण आर्थिक कारक (factor) अतिरिक्त नष्ट होने वाले भोजन को बचा पाना तथा उसका चतुर्दिक वितरण कर पाने की क्षमता रखना है।

इस विवरण से यह स्पष्ट दृष्टिगोचर होता है कि परमाणु ऊर्जा के क्षेत्र में नये नये अनुसन्धानों का मनुष्य के जीवन तथा मानव समाज के बहुरूपी एवम् सर्वोन्मुखी विकास पर सीधा तथा महत्वपूर्ण प्रभाव पड़ा है। इन अनुसन्धानों तथा तकनीकी प्रगति द्वारा हम भविष्य में अधिक अनाज उपजा सकेंगे तथा इस उपज का दीर्घकाल तक महत्तम पोषकता के साथ परिरक्षण कर सकेंगे। इसके द्वारा हम बड़े-बड़े उद्योगों में बड़ी संख्या में अपने देशवासियों को व्यवसाय पर लगाकर उनके पूर्ण विकास के लिये नये मार्ग खोलने में सहायक होंगे। इस प्रकार परमाणु शक्ति का यह विकास समाज की भलाई करने के साथ ही उस पर अपनी गहन तथा अमिट छाप छोड़े चल रहा है।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 1, January 1970, Pages 13-18

भाट एवं जलोढ़ मिट्टियों में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों का तुलनात्मक अध्ययन

शिव गोपाल मिश्र एवं नरेन्द्र त्रिपाठी
कृषि रसायन, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—नवम्बर 15, 1969]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में उत्तर प्रदेश के दो प्रमुख मिट्टी समूहों की मिट्टियों (कैल्सियम युक्त 'भाट' एवं जलोढ़) में ताँबा, लौह एवं सेलेनियम, इन तीनों की पूर्ण तथा प्राप्य मात्राओं से सम्बन्धित अध्ययन के फल दिए गए हैं। यह देखा गया है कि भाट मिट्टी में सम्पूर्ण ताँबा तथा सम्पूर्ण सेलेनियम की मात्रा जलोढ़ मिट्टियों की अपेक्षा अधिक है, किन्तु उनकी प्राप्य मात्रा तुलनात्मक दृष्टि से कम है। यद्यपि भाट मिट्टियों में कुल लौह की मात्रा काफी कम है किन्तु फिर भी प्राप्य लौह की मात्रा जलोढ़ मिट्टियों की अपेक्षा कई गुनी अधिक है। भाट मिट्टियों में ताँबे की कुछ न्यूनता प्रतीत होती है।

Abstract

A comparative study on some trace elements in Bhat and Alluvial soils. *By* S. G. Misra and N. Tripathi, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

In the present paper, some surface soil-samples of two soil types, viz. a calcareous Bhat and Alluvial soils have been studied for their total and available Fe, Cu and Se contents. It was found that total content of both Cu and Se was higher in Bhat soils, but the available content was comparatively low. A greater percentage of total Cu and Se was in available form in Alluvial soils than in Bhat soils. Although the total Fe content in Bhat soils was lower than in alluvial soils, the available content was manyfold higher than alluvial soils. The Bhat soils seem to be somewhat deficient in Cu.

सूक्ष्ममात्रिक तत्व पौधों की समुचित वृद्धि एवं उपापचय के लिये बहुत ही आवश्यक हैं। इनकी एक निश्चित मात्रा ही पौधों के लिये आवश्यक होती है, क्योंकि इनकी कमी या अधिकता से पौधों में क्रमशः न्यूनता रोग (deficiency disease) या विषालुता रोग (Toxicity disease) उत्पन्न हो जाते हैं। भारतीय मृदाओं में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों का विस्तृत अध्ययन अभी हाल में शुरू हुआ है, फिर भी इस दिशा में काफी प्रगति हो रही है। पंजाब में कांवर एवं सिंह (1961), भुम्बला एवं धिंगरा (1964) तथा उत्तर प्रदेश में अगरवाल आदि (1963-64) तथा मिश्रा एवं सहयोगियों (1964) ने मृदा में

बोरान, मैंगनीज, ताँबा, जिंक, मालिब्डनम एवं लौह का अध्ययन किया है। किन्तु पूर्वी उत्तर प्रदेश की मिट्टियों पर अभी तक कोई विस्तृत अध्ययन नहीं हुआ है, अतः प्रस्तुत शोध पत्र में पूर्वी उत्तर प्रदेश के तराई के निकट पायी जाने वाली कैल्सियम युक्त 'भाट' एवं अन्य जलोढ़ मिट्टियों में लौह, ताँबा तथा सेलेनियम का अध्ययन किया गया है।

सेलेनियम जो अभी तक एक विषालु तत्व समझा जाता था, 1957 में सर्वप्रथम श्वार्ज एवं फोल्ज (1957) तथा स्टाक्सटाड एवं सहयोगियों (1957) द्वारा पशुओं के लिए आवश्यक सूक्ष्ममात्रिक तत्व सिद्ध हो चुका है। न्यूजीलैंड, फिनलैंड, स्काटलैंड, अमेरिका एवं विश्व के अनेक भागों में इस तत्व की बहुत ही कमी है, जिसके फलस्वरूप वहाँ पशुओं में 'श्वेतपेशी रोग' (white muscle disease) तथा अन्य कई बीमारियाँ हो जाती हैं। इसके विपरीत आयरलैंड, यूटाह तथा अमेरिका के कुछ भागों में इसकी काफी मात्रा पाई जाने के कारण वहाँ बहुत से पशुओं में विषालुता की बीमारी हो जाती है। इसके अतिरिक्त हर्ड केरर (1938), मार्टिन (1938) तथा नेशन एवं मक्लोरी (1963) ने सेलेनियम की सूक्ष्म मात्रा को पौधों पर प्रयोग करके काफी अच्छे परिणाम प्राप्त किए हैं। अधिक मात्रा होने पर यह भी अन्य सूक्ष्म-मात्रिक तत्वों की भाँति विषालु (toxic) हो जाता है, किन्तु अभी तक भारतवर्ष में सेलेनियम पर कोई कार्य नहीं हुआ है, फलस्वरूप हम लोगों ने सर्वप्रथम यह कार्य प्रारम्भ किया है।

प्रयोगात्मक

इस अध्ययन में भाट एवं जलोढ़ मिट्टियाँ प्रयुक्त की गई हैं, जो उत्तर प्रदेश के विभिन्न स्थानों (सारणी 1) से एकत्रित की गईं, फिर इनमें पी-एच, कैल्सियम कार्बोनेट, कार्बनिक कार्बन, सेस्क्वी-

सारणी 1

मिट्टियों की संरचना

मिट्टी के प्रकार		स्थान	pH	$CaCO_3$ %	कार्बनिक C %	सेस्क्वीआक्साइड %
भाट	1	देवरिया	8·8	32·34	0·519	6·30
	2	देवरिया	8·2	32·25	0·543	5·54
	3	देवरिया	8·7	29·08	0·450	6·15
	4	देवरिया	8·4	30·58	0·681	4·27
	5	देवरिया	8·6	33·35	0·315	4·08
	6	देवरिया	8·7	38.14	0·300	5·85
जलोढ़	1	देवरिया	7·5	1·70	0·350	7·60
	2	देवरिया	7·2	17·70	0·345	5·30
	3	इलाहाबाद	7·4	4·80	0·228	6·80
	4	इलाहाबाद	7·3	1·80	0·300	6·56
	5	झांसी	7·5	1·70	0·345	7·08

सारणी 2

मिट्टियों में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की मात्रा

	मिट्टी के प्रकार	संपूर्ण Fe %	प्राप्य Fe ppm	$\frac{\text{प्राप्य Fe}}{\text{संपूर्ण Fe}} \times 100$	संपूर्ण Cu ppm	प्राप्य Cu ppm	$\frac{\text{प्राप्य Cu}}{\text{संपूर्ण Cu}} \times 100$	संपूर्ण Se ppm	प्राप्य Se ppm	$\frac{\text{प्राप्य Se}}{\text{संपूर्ण Se}} \times 100$
भाट	1	1·512	969	6·42	9·76	0·98	10·04	0·395	0·0190	4·81
	2	1·568	968	6·17	13·42	1·22	9·09	0·316	0·0237	7·50
	3	1·736	917	5·28	34·16	2·20	6·44	0·395	0·0317	8·03
	4	1·456	748	5·14	26·84	1.71	6·37	0·356	0·0158	4·44
	5	1·400	681	4·86	18·30	1·22	6·66	0·316	0·0284	9·00
	6	1·680	982	5·84	14·64	1·71	11·68	0·356	0·0284	7·99
औसत		1·559	877·5	5·628	19·52	1·507	7·72	0·336	0·0245	7·29
जलोढ़	1	3·248	24	0·07	24·40	3·90	16·00	0·277	0·0284	10·26
	2	1·960	30	0·15	18·30	2·93	16·01	0·316	0·0237	7·50
	3	2·920	25	0·09	9·76	1·22	12·50	0·198	0·0316	15·98
	4	2·184	24	0·11	14·64	1·95	13·32	0·395	0·0427	10·81
	5	2·828	37	0·13	20·50	3.14	15·31	0·158	0·0316	20·00
औसत		2·548	28	0·110	17·52	2·63	15·01	0.269	0·0395	14·70

सारणी 3

भाट तथा जलोढ़ मिट्टियों में विभिन्न अवयवों के परास

मिट्टी के प्रकार	प्रयुक्त नमूनों की संख्या	pH	$CaCO_3$ %	कार्बनिक C %	सेस्क्वीआक्साइड %
भाट	6	8·2-8·8	29·08-38·14	0·300-0·543	4·08-6·30
जलोढ़	5	7·2-7·5	1·70-4·80	0·300-0·345	6·56-7·60

मिट्टी के प्रकार	प्रयुक्त नमूनों की संख्या	संपूर्ण Fe %	प्राप्य Fe ppm	संपूर्ण Cu ppm	प्राप्य Cu ppm	संपूर्ण Se ppm	प्राप्य Se ppm
भाट	6	1·400-1·736	681-982	9·76-34·16	0·98-2·20	0·316-0·395	0·0158-0·0316
जलोढ़	5	1·960-3·248	24-37	9·76-24·40	1·22-3·90	0·158-0·395	0·0237-0·0427

ऑक्साइड एव फेरिक ऑक्साइड की मात्रा ज्ञात की गई। प्राप्य लौह, नार्मल अमोनियम ऐसीटेट (पी० एच 3) से निक्षालित करके ऑर्थोफिनान्थ्रोलीन विधि से तथा संपूर्ण ताँबा नाइट्रिक, सल्फ्यूरिक एवं परक्लोरिक अम्ल से उपचारित करके कार्बमेट विधि से एवं प्राप्य ताँबा $0 \cdot 02M$ EDTA से निक्षालित करके कार्बामेट विधि से रङ्गमापी की सहायता से ज्ञात किया गया। इसी प्रकार संपूर्ण सेलेनियम स्टेन्टन एवं मक्डोनाल्ड (1965) की विधि से एवं प्राप्य सेलेनियम मिट्टी को गर्म पानी से आधे घन्टे तक निक्षालित करके उपरोक्त विधि से रङ्गमापी की सहायता से ज्ञात किया गया। प्राप्त आंकड़ों को सारणी 1 एवं 2 में प्रस्तुत किया गया है।

परिणाम एवं विवेचना

संपूर्ण तथा प्राप्य लौह : सारणी 2 में प्रस्तुत परिणामों से यह स्पष्ट है कि भाट मिट्टियों में संपूर्ण लौह की मात्रा (1·559%) जलोढ़ मिट्टियों (2·548-%) की अपेक्षा कम है, किन्तु इसके विपरीत भाट मिट्टियों में प्राप्य लोहे की मात्रा (877·5 अंश/दस लक्षांश), जलोढ़ मिट्टियों (28 अंश/दस लक्षांश) से, लगभग 30 गुना अधिक है। अधिक चुनही मिट्टियों में उत्तरी बिहार में, झा (1964) ने भी संपूर्ण लोहे की कम मात्रा देखी है जो कि लगभग उसी प्रकार के पैतृक शैलों से बनी होने के कारण है। इसी प्रकार टक्कर आदि (1969) ने भी चुनही मिट्टियों में अपचेय लौह की मात्रा 32-550 ppm तक प्राप्त की। अगरवाल (1963-64) ने उत्तर प्रदेश की कुछ जलोढ़ मिट्टियों में 0·91–2·37% तक संपूर्ण लौह (Fe_2O_3) प्राप्त किया है। भाट मिट्टियों में अपेक्षाकृत कम लौह की मात्रा संभवतः उनकी अप्रौढ़ता एवं लोह विहीन पैतृक शैलों के कारण है। फिर भी इन मिट्टियों में प्राप्य लौह की अधिकता कैल्सियम कार्बोनेट की अधिकता के कारण ही जान पड़ती है। भाट मिट्टियों में सम्भवतः अधिक पी-एच एवं कैल्सियम कार्बोनेट तथा अच्छा वायु संचार एवं जल निकास के कारण Fe^{++} लौह आक्सीकृत होकर Fe^{+++} हाइड्राक्साइड एवं फास्फेट के रूप में अवक्षेपित होकर कैल्सियम कार्बोनेट कणों के चारों ओर अधिशोषित रहता है, जो कि N NH_4OAC(pH3) से निष्कर्षित हो जाता है, या दूसरे शब्दों में पौधों के लिये प्राप्य होता है। अगरवाल एवं मेहरोत्रा (1963) ने लखनऊ की जलोढ़ मिट्टियों में प्राप्य लौह की मात्रा 1·40 के 6·8[illegible] अंश/दशलक्षांश तक देखा और उनमें लौह की न्यूनता बतायी है। भाट मिट्टियों में प्राप्य लौह, कुल लौह का 5·628% और जलोढ़ में केवल 0·110% पाया गया है।

संपूर्ण एवं प्राप्य ताँबा : सारणी 2 से यह स्पष्ट है कि भाट मिट्टियों में संपूर्ण ताँबे की मात्रा जलोढ़ मिट्टियों से अधिक होती है। भाट मिट्टियों में यह 9·78 से 34·16 अंश/दसलक्षांश (औसत 19·52 अंश दसलक्षांश) तथा जलोढ़ मिट्टियों में 9·76 से 24·40 अंश/दसलक्षांश (औसत 17·52 अंश/दसलक्षांश) तक देखी गई। उत्तर प्रदेश की जलोढ़ मिट्टियों में 1·8 से 40·7 अंश/दस लक्षांश तक संपूर्ण तांबा पाया गया है (अगरवाल, 1963-64) एवं मध्य प्रदेश में औसतन 22·4 अंश/दस लक्षांश (तम्बोली 1965) तथा महाराष्ट्र की काली मिट्टियों में 44–234 अंश/दस लक्षांश संपूर्ण ताँबा पाया गया है। इसे देखने से यह पता चलता है उत्तर प्रदेश की भाट एवं जलोढ़ दोनों प्रकार की मिट्टियों में संपूर्ण ताँबे की मात्रा काली मिट्टियों की अपेक्षा कम है।

प्राप्य ताँबे की मात्रा : भाट मिट्टियों में 0·98 से 2·20 अंश/दसलक्षांश (औसत 1·907 अंश/दसलक्षांश) तथा जलोढ़ में 1·22 के 3·90 अंश/दसलक्षांश (औसत 2·63अंश/दसलक्षांश) तक है। इससे प्रतीत होता है कि भाट मिट्टियों में प्राप्य ताँबे की मात्रा जलोढ़ मिट्टियों की अपेक्षा काफी कम है। जलोढ़ मिट्टियों में प्राप्य ताँबा संपूर्ण ताँबे का 15·01% तथा भाट मिट्टियों में केवल 7·72% है। इसका कारण संभवतः भाट मिट्टियों में अधिक कैल्सियम कार्बोनेट एवं पी-एच का होना हो सकता है। मिश्रा एवं तिवारी (1964) के अनुसार अधिक पी-एच एवं कैल्सियम कार्बोनेट के कारण ताँबे की उपलब्धि कम हो जाती है। हेनरिक्सन (1957) द्वारा प्रस्तावित भूमि में ताँबे की न्यूनतम सीमा 1 अंश/दसलक्षांश उपलब्ध ताँबा मानने पर यह पता चलता है कि भाट मिट्टियों में ताँबे की कमी हो सकती है और इसमें ताँबे के उर्वरकों का प्रयोग करने पर अच्छा प्रभाव मिल सकता है।

संपूर्ण एवं प्राप्य सेलेनियम : भाट मिट्टियों में संपूर्ण ताँबे की मात्रा की भाँति ही संपूर्ण सेलेनियमभी जलोढ़ मिट्टियों की अपेक्षा अधिक है। भाट मिट्टियों में 0·316 से 0·395 ppm (औसत 0·339 अंश/दस लक्षांश संपूर्ण सेलेनियम पाया गया। पटेल एवं मेहता (1968) ने गुजरात की काली मिट्टियों में संपूर्ण सेलेनियम की मात्रा 0·142 से 0·678 अंश/दसलक्षांश (औसत 0·375 अंश/दसलक्षांश) देखी है। प्राप्य सेलेनियम की मात्रा भाट मिट्टियों में 0·0158 से 0.0316 अंश/दसलक्षांश (औसत 0.0245 अंश दसलक्षांश) तथा जलोढ़ मृदाओं में 0 0237 से 0·0427 ppm (औसत 0·0395 अंश/दस लक्षांश) तक है। इसी प्रकार जलोढ़ मृदाओं में संपूर्ण सेलेनियम का 14·7% और भाट मिट्टियों में कुल का 7·29 प्रतिशत प्राप्य सेलेनियम के रूप में है। इससे यह सिद्ध होता है कि प्रयुक्त दोनों मिट्टियों में काली मिट्टी की अपेक्षा प्राप्य सेलेनियम की मात्रा बहुत कम है क्योंकि काली मिट्टियों में प्राप्य सेलेनियम की औसत मात्रा 0·079 अंश/दसलक्षांश पायी गयी है।

इस प्रकार यह ज्ञात होता है कि प्रस्तुत मिट्टियों को सेलेनियम की मात्रा के आधार पर सामान्य मिट्टियों की कोटि में रखा जा सकता है क्योंकि स्वेन (1955) के अनुसार विश्व की अधिकांश सामान्य मिट्टियों में 0·1 से 2·0 ppm तक सेलेनियम पाया जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से एक (नरेन्द्र त्रिपाठी) भारतीय कृषि अनुसंधान परिषद्, नई दिल्ली के प्रति सीनियर फेलोशिप प्रदान करने के लिये आभारी है।

निर्देश

1. अगरवाल, एस० सी०। Annual Progress Report of I. C. A. R. Scheme "Micronutrient status of U. P. Soils" for the year; 62-63 and 63-64.

2. अगरवाल, एस० सी० एवं मेहरोत्रा, एन०के०। **जर्न० इण्डि० सोसा० सॉयल साइंस,** 1963, **11**

3. काँवर, जे० एस० एवं सिंह, एस० एस०। **सॉयल साइंस,** *1961*, **92,** 207.

4. झा, के० के०। — **जर्न० इण्डि० सोसा० सॉयल साइंस**, 1964, **12**. 235.

5. टक्कर, पी० एन०, भुम्बला, डी० आर० एवं अरोरा, वी० आर०। — **एग्रोकीमिका**, 1969, **13**, 55.

6. ताम्बोली, पी० एम०। — **देखें कावर, जे० एस० तथा रंधावा, एन० एस० द्वारा लिखित** "Micronutrient Researches in Soil and Plants in India, A Review." 1967, **आई० सी० ए० आर०, नई दिल्ली**

7. नेशन, ए० तथा मक्लौरी, डब्लू० डी०। — **स्टेवर्ट कृत** "Plant Physiology" (1963) **पुस्तक से उद्धृत, पृ०** 576.

8. पटेल, सी० ए० एवं मेहता, बी० भी०। — First I.C.A.R. Workshop on Micronutrients at Lucknow, 1968.

9. भुम्बला, डी० आर० एवं धिंगरा, डी० आर०। — **जर्न इण्डि० सोसा० सॉयल साइंस**, 1964, **12**, 255.

10. मार्टिन, ए० एल०। — **अमे० जर्न० बाटनी**, 1936, **23**, 471.

11. मिश्रा, एस० जी० एवं तिवारी, आर० सी०। — **जर्न० इण्डि० सोसा० सॉयल साइंस**, 1964, **12**, 289

12. श्वार्ज, के० एवं फोल्ज, सी० एम०। — **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1957, **79**, 3292.

13. स्टाक्सटाड, ई० एल० आर०, पेटरसन, ई० एल० एवं मिल्सट्रे, आर०। — **पोल्ट्री साइंस**, 1957, **36**, 1160.

14. स्टेन्टन, आर० ई० एवं मक्डोनाल्ड ए०जे०। — **एनालिस्ट**, 1965, **90**, 497.

15. स्वेन, डी० यफ०। — **टेक० कम्यू० आफ दी कामनवेल्थ ब्यूरो आफ सॉयल साइंस**, 1965, **48**, 157.

16. हर्डकेरर, ए० एम०। — **अमे० जर्न० बाटनी**, 1938, **25**, 666.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No 1, January 1970, Pages 19-24

5 घात वाले लेन-एम्डेन समीकरण के तारे के भार तथा अर्द्धव्यास के सम्बन्ध में

आर० एस० गुप्ता तथा जे० पी० शर्मा
गणित विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—मई 7, 1969]

सारांश

इस शोधपत्र का प्रथम उद्देश्य 5 घात वाले लेन-एम्डेन समीकरण के तारे का भार तथा अर्द्धव्यास का निकटतम मान प्रस्तुत करना है जिसके हेतु, कथित समीकरण का तालिकाबद्ध हल D=−0·01 के लिये दिया गया है; और द्वितीय उद्देश्य 5 घात वाले लेन-एम्डेन समीकरण के संख्यात्मक हल [1] में प्रत्येक पद के लिये (i) छेदन त्रुटि, तथा (ii) संचय त्रुटि का तालिकाबद्ध विवरण देना है।

Abstract

On mass and radius of the star of the Lane-Emden equation of index 5. *By* R. S. Gupta and J. P. Sharma, Department of Mathematics, University of Allahabad, Allahabad.

The object of this paper is first to present an approximate value of the mass and radius of the star of Lane-Emden equation of index 5 for which the numerical solution of the said equation in a tabular form for the value of D equal to $-0{\cdot}01$ has been given; and second to give an account of the errors: (i) truncation error, and (ii) accumulation error in a tabular form for each step in the numerical solution of the Lane-Emden equation of index 5.[1]

1. विषय प्रवेश: 5 घात वाला लेन-एम्डेन समीकरण:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)=-\theta^5, \tag{1}$$

कुछ रूपान्तरों (केल्विन का रूपान्तर तथा एम्डेन का रूपान्तर) के पश्चात् रूप [2]

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\tfrac{1}{4}z(1-z^4) \tag{2}$$

धारण करता है, जहाँ पर

$$\frac{1}{x}=\xi=e^{-t}\ ;\quad \theta=\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}z=(\tfrac{1}{2}e^{t})^{1/2}z. \tag{3}$$

समीकरण (2) की प्रथम समग्रता से

$$\frac{dz}{dt}=\pm\left[2D+\frac{z^2}{4}-\frac{z^6}{12}\right]^{1/2} \tag{4}$$

प्राप्त होता है, जहाँ पर D समग्रता की एक अचल संख्या है। समीकरण (4) का हल, सीमित पदों में, $D=0$ तथा $D=\frac{1}{12}$ के लिये क्रमशः स्कुस्टर[3] और श्रीवास्तव[4] द्वारा दिया जा चुका है। D के दूसरे अशून्य मान, जिसके लिये समीकरण (4) सभी वर्ग के महत्वपूर्ण एम-हल और सभी वर्ग के एफ-हल देता है, असमता[5]

$$144D^2-1<0 \tag{5}$$

में निहित हैं। एम-हलों के लिये समीकरण (4) का z अन्तराल $(0, \sqrt{2})$ में भ्रमण करने के लिये स्वतंत्र है। D के दूसरे अशून्य मान के लिये ($D=0$ तथा $D=\frac{1}{12}$ के अतिरिक्त), जैसा कि चन्द्रशेखर (1939) ने कहा है, समीकरण (4) के स्पष्ट हल का अस्तित्व नहीं दिखाई पड़ता, इसलिये हम संख्यात्मक हल की सरल विधि की शरण लेते हैं। हाल ही में श्रीवास्तव और शर्मा ने[1] तारे के निकटतम भार और अर्द्धव्यास निकालने की दृष्टि से 5 घात वाले लेन-एमडेन समीकरण का एम-हल $D=-0{\cdot}01$ के लिये दिया है। उन्होंने निम्नलिखित परिणाम

$$24{\cdot}7901<R_{-0{\cdot}01}<25{\cdot}0482 \tag{6}$$

और

$$\frac{24{\cdot}8(6k)^{5/2}}{G^{5/2}\sqrt{(4\pi)}}\left[-\xi^{3/2}\frac{d\theta_5}{d\xi}\right]^2_{\xi=\xi_1}<M^2_{-0{\cdot}01}<\frac{25{\cdot}05(6k)^{5/2}}{G^{5/2}\sqrt{(4\pi)}}\left[-\xi^{3/2}\frac{d\theta_5}{d\xi}\right]^2_{\xi=\xi_1}, \tag{7}$$

प्राप्त किये, जहाँ पर R तारे के अर्द्धव्यास और M तारे के भार को प्रदर्शित करते हैं, और दूसरे संकेत वही अर्थ रखते हैं जैसा कि चन्द्रशेखर द्वारा लिखित पुस्तक में हैं। परन्तु अभाग्यवश आयलर की विधि[6] जो कुछ भी हो, (6) तथा (7) परिणामों को संतोषजनक रूप न दे सकी क्योंकि इस विधि में तीन प्रकार की त्रुटियाँ : (i) छेदन त्रुटि (ii) संचय त्रुटि, और (iii) राउन्ड आफ त्रुटि थीं। इसलिये, हाल ही में श्रीवास्तव और शर्मा[1] द्वारा दिये गये परिकलन में प्रत्येक पद के लिये, हम प्रस्तुत शोधपत्र में केवल प्रथम दो त्रुटियों का उल्लेख सारणी 1 में करते हैं। जहाँ तक राउन्ड आफ त्रुटि का प्रश्न है, यह हमारे उद्देश्य के लिये बहुत ही कम महत्वपूर्ण है। इसलिये (6) और (7) परिणामों में अत्यधिक यथार्थता लाने के लिये हम आयलर की रूपान्तरित विधि [6, § 8·8] की सहायता समीकरण (4) को संख्यात्मक ढंग से हल करने के लिये लेते हैं और प्रत्येक पद के लिये परिकलन सारणी 2 में दिखाया गया है।

2. $D=-0{\cdot}01$ के लिये त्रुटियों का उल्लेख :

मान लिया

$$F(0,z)=\pm\left[2D+\frac{z^2}{4}-\frac{z^6}{12}\right]^{1/2}=\frac{dz}{dt}.$$

इस समीकरण को क्रमशः t और z के सापेक्ष में अवकलन करने पर, हमें

$$F_t=0 \text{ तथा } F_z=\pm\tfrac{1}{4}z\,(1-z^4)\left[2D+\frac{z^2}{4}-\frac{z^6}{12}\right]^{-1/2} \tag{8}$$

प्राप्त होता है। छेदन त्रुटि $\frac{1}{2}h^2 z_i''(i=1, 2, 3, \ldots n)$, t और z के संगत मान के लिये, सूत्र

$$\tfrac{1}{2}h^2 z_i''=\tfrac{1}{8}z(1-z^4)h^2 \tag{9}$$

द्वारा व्यक्त की जाती है जहाँ पर $z_i''=\frac{d^2z_i}{dt^2}$ तथा $h=$ अन्तराल। हम एम्पली फैक्टर $1+hk_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n.)$ को परिकलन में प्रत्येक पद के लिये, सूत्र

$$1+hk_i \cong 1+hF_z \tag{10}$$

द्वारा गणना करते हैं, जहा $K_i \cong \frac{\partial F(0, z_i)}{\partial z_i}$, $i=1, 2, 3, \ldots, n.$। छेदन त्रुटि और एमप्लीफिकेशन खंड के निकटतम मान ज्ञात करने के पश्चात्, हम अन्तर समीकरण

$$\epsilon_{i+1}=(1+hK_i)\epsilon_i+h^2 a_{i+1} \tag{11}$$

का उपयोग संचित त्रुटि ϵ_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n.)$ की गणना करने के लिये करते हैं। परिकलन सारणी 1 में दिखाये गये हैं।

$D=-0{\cdot}01$

सारणी 1

त्रुटियाँ

t	$\frac{1}{2}h^2 Z_i''$	$\frac{1}{2}+hF_z$	ϵ
0·50	$-379{\cdot}1\times10^{-4}$	1·3343	$-379{\cdot}1\times10^{-4}$
0·00	$000{\cdot}0\times10^{-4}$	1·0000	$000{\cdot}0\times10^{-4}$
−0·50	$144{\cdot}6\times10^{-4}$	0·8332	$144{\cdot}6\times10^{-4}$
−1·00	$166{\cdot}1\times10^{-4}$	0·7574	$275{\cdot}6\times19^{-4}$
−1·50	146.0×10^{-4}	0·7107	$341{\cdot}8\times10^{-4}$
−2·00	$120{\cdot}9\times10^{-4}$	0·6492	$342{\cdot}8\times10^{-4}$
−2·50	$101{\cdot}3\times10^{-4}$	0·3775	$230{\cdot}7\times10^{-4}$
−3·00	$89{\cdot}0\times10^{-4}$	0·2823	$154{\cdot}1\times10^{-4}$
−3·10	$56{\cdot}6\times10^{-4}$	0·1300	$76{\cdot}6\times10^{-4}$
−3·20	$31{\cdot}7\times10^{-4}$	0·0277	$40{\cdot}4\times10^{-4}$
−3·21	$29{\cdot}6\times10^{-4}$	0·0267	$30{\cdot}5\times10^{-4}$
−3·22	$28{\cdot}5\times10^{-4}$	परिगणित नहीं किया जा सकता	$28{\cdot}5\times10^{-4}$

इस प्रकार त्रुटि पद, $t=-3{\cdot}22$ के लिये, $28{\cdot}50\times10^{-4}$ है; और इसलिये z का शुद्ध मान $t=-3{\cdot}22$ पर ·2860 हुआ, [6, समीकरण 8·32]। इस प्रकार स्पष्ट ज्ञात होता है कि इसके पूर्व $\frac{dz}{dt}$

काल्पनिक हो जाय, हम t और z के संगत मान के लिये $\frac{dz}{dt}$ के और भी मान प्राप्त कर सकते हैं और तारे के अर्द्धव्यास का निकटतम मान और भी शुद्धता से निकल सकता है। कोई भी z का शुद्ध मान अन्तराल को कम कर प्राप्त कर सकता है, परन्तु इसके लिये परिकलन में अंकों की संख्या बढानी चाहिए क्योंकि राउन्ड आफ त्रुटि प्रत्येक पद के लिये समान रहती है। परन्तु हम यह देखते हैं कि अन्तराल को कम करना और अंकों की संख्या बढाना यह एक बड़ा दुखदाई कार्य हो जावेगा तथा अभीष्ट परिणाम के लिये अधिक कार्य करना पड़ेगा। इसलिये यह न्यायसिद्ध दिखाई पड़ता है कि समग्रता के लिये हम और शुद्ध सूत्र [6, § 8·8, समीकरण (8·4)]

$$z_{i+1}=z_i+\tfrac{1}{2}h[F(0, z_i)+F(z_{i+1})] \tag{12}$$

का उपयोग करें।

3. $D=-0{\cdot}01$ **के लिये संख्यात्मक हल :**

हम (4) का हल खोजते हैं जो कि सीमान्त प्रतिबन्धों

$$z=1\,;\ \frac{dz}{dt}=\pm\ [2D+\tfrac{1}{8}]^{1/2}\ at\ t=0 \tag{13}$$

को संतुष्ट करता है।

माना $t_0=0$, और $z_0=1$, तब समीकरण (8·4) [6] का अनुकरण करते हुये z के भिन्न भिन्न मान $z'_1, z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{19}$ तक, संगत t के भिन्न भिन्न मान $t'_1=0{\cdot}50$, $t_1=-0{\cdot}50$, $t_2=-1{\cdot}00$, $t_3=-1{\cdot}50, \cdots, t_{19}$ तक, के लिये गणना करते हैं। t के भिन्न भिन्न मानों का चुनाव और h के भी, वास्तव में, इस बात पर निर्भर करते हैं कि हम परिकलन के साथ कितना आगे बढ़ सकते हैं जब तक कि $\frac{dz}{dt}$ काल्पनिक नहीं हो जाता ; अन्तराल h एक समान हो सकते हैं और नहीं भी। परिकलन सारणी 2 में दिया गया है जिसमें ξ, θ और $-\frac{d\theta}{d\xi}$ के मान भी निहित हैं।

$D=-0{\cdot}01$

सारणी 2

हल

t	z	$\frac{dz}{dt}$	ξ	θ	$-\frac{d\theta}{d\xi}$
0·50	1·1768	0·324	0·6065	1·0690	1·366000
0.00	1·0000	0·383	1·0000	0·7073	0·624300
−0·50	0·8170	0·349	1·6487	0·4499	0·252800
−1·00	0·6582	0·286	2·7188	0·2823	0·104600
−1·50	0·5314	5·220	4·4817	0·1774	0·036200
−2·00	0·4351	0·164	7·3891	0·1132	0·016900
−2·50	0·3653	0·115	12·1820	0·0740	0·004950
−3·00	0·3183	0·073	20·0850	0·0502	0·001823

t	z	$\frac{dz}{dt}$	ξ	θ	$-\frac{d\theta}{d\xi}$
−3·10	0·3114	0·065	22·1980	0·0467	0·001494
−3·20	0·3049	0·046	24·5320	0·0435	0·001214
−3·21	0·3043	0·055	24·7901	0·0432	0·001192
−3·22	0·3032	0·054	25·0482	0·0428	0·001160
−3·42	0·2938	0·040	30·5942	0·0376	0·000781
−3·62	0·2874	0·024	37·3678	0·0332	0·000519
−3·72	0·2853	0·017	41·2978	0·0314	0·000425
−3·82	0·2839	0·010	45·6412	0·0297	0·000394
−3·87	0·2835	0·007	47·9917	0·0289	0·000316
−3·91	0·2833	0·005	49·9216	0·0284	0·000294
−3·93	0·2832	0·003	50·9608	0·0028	0·000089
−3·94	0·28317	वास्तविक	51·4804	0·00279	0·000085
−3·95	0·28314	काल्पनिक			

सारणी 2, निर्देशित D के अशून्य मान के लिये, प्रकट करती है कि जैसे $|D|$ बढ़ता है, $t_{19}=-3{\cdot}95$ पर $\frac{dz}{dt}$ काल्पनिक हो जाता है। लेकिन $t_{18}=-3{\cdot}94$ पर, $\frac{dz}{dt}$ वास्तविक है (जिसको कि पहले से जांच लिया गया है) जब कि θ का मान शून्य के करीब है। अब स्पष्टतः $t_{19}=-3{\cdot}95$ पर, $\xi=52{\cdot}0000$। इस प्रकार हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि लेन-एमडेन (5 घात वाले) समीकरण के तारे का अर्द्धव्यास अवश्य ही असमता

$$51{\cdot}4804 < R_{-0{\cdot}01} < 52{\cdot}0000 \tag{14}$$

को संतुष्ट करेगा। $n=5$ के लिये, भार-अर्द्धव्यास में सम्बन्ध [2, समीकरण 72]

$$R=\frac{G^{5/2}\sqrt{(4\pi)}}{(6K)^{5/2}}M^2\left[-\xi^{3/2}\frac{d\theta_5}{d\xi}\right]^{-2}_{\xi=\xi_1} \tag{15}$$

है। समीकरणों (14) और (15) को एक में लेने पर, हम आसानी से

$$\frac{51{\cdot}48(6K)^{5/2}}{G^{5/2}\sqrt{(4\pi)}}\left[-\xi^{3/2}\frac{d\theta_5}{d\xi}\right]^2_{\xi=\xi_1} < M^2_{-0{\cdot}01} < \frac{52{\cdot}00(6K)^{5/2}}{G^{5/2}\sqrt{(4\pi)}}\left[-\xi^{3/2}\frac{d\theta_5}{d\xi}\right]^2_{\xi=\xi_1} \tag{16}$$

प्राप्त करते हैं। परिणाम (15) तथा (16) क्रमशः परिणाम (6) और (7) के परिवर्तित रूप हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

श्री जे० पी० शर्मा जूनियर फेलोशिप प्रदान किये जाने हेतु विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का अत्यन्त ही आभारी है।

निर्देश

1. श्रीवास्तव, एस० तथा शर्मा जे० पी० । **प्रोग्रे० आफ मैथ०,** 2(2), 32-34.
2. चन्द्रशेखर, एस० । An Introduction to the Study of Stellar Structure, 1939, **अध्याय** 4.
3. स्कुस्टर, ए० । **ब्रि० एसो० रिपो०,** 1883, **पृ०** 427.
4. श्रीवास्तव, एस० । **एस्ट्रोफि० जर्न ०,** 1962, **136,** 680.
5. श्रीवास्तव, एस० । **द मैथ० स्टू०,** 1966, **34,** 19.
6. कुंज, केसर एस० । Numerical Analysis, **मैकग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क,** 1957, **अध्याय** 8.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 13, No 1, January 1970, Pages 25-30

ओराइजा सटाइवा के भूसी के तेल का अध्ययन

कृष्णबहादुर
रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय इलाहाबाद
एवं
रामजी लाल श्रीवास्तव
रसायन विभाग, यूइंग क्रिश्चियन कालेज (प्रयाग विश्वविद्यालय) इलाहाबाद

सारांश

पेट्रोलियम ईथर द्वारा ओराइजा सटाइवा (धान) की भूसी से तेल प्राप्त किया तथा तेल में से फासफोलिपिड ऐसीटोन की सहायता से पृथक कर दिया गया। अब इस तेल का साबुनीकरण करके असाबुनीकृत तथा साबुनीकृत दो प्रभाजक प्राप्त किया गया। साबुनीकृत पदार्थ से प्राप्त अम्लों को ठोस तथा द्रव वसा अम्लों में अलग किया तथा इनका मेथिल इस्टर बनाकर कम दाब पर आंशिक आसवन द्वारा कई प्रभाजकों में पृथक कर लिया गया। उनकी साबुनीकरण संख्या और आयोडीन संख्या ज्ञात कर गणना द्वारा स्टियरिक अम्ल 0·89%, पामिटिक अम्ल 6·06%, मिरिस्टिक अम्ल 15.48%, लारिक अम्ल 34·22%, लीनोलीक अम्ल 6·67 और ओलीक अम्ल 36·66% की उपस्थित ज्ञात हुई।

Abstract

The study of the oil of Oriza Sativa Waste. *By* Krishna Bahadur, Chemistry Department, and Ramji Lal Srivastava, Chemistry Department, Eving Chrichtian College, University of Allahabad, Allahabad.

The oriza sativa husk oil was extracted with petroleum ether (60:80). Phospholipids were separated from the oil by adding acetone. Then the extracted oil was saponified. The unsaponifiable matter was removed by dissolving it in ether. The saponifiable matter was treated with dilute hydrochloric acid and the liberated fatty acids were extracted with ether. The fatty acids were separated into solid and liquid fractions and they were converted into methyl esters which were separated into different fractions by means of fractional distillation under reduced pressure. The saponification and iodine values of each fractions was determined and by calcu lation the presence of stearic acid 0·89%, Palmitic acid 6-06%, Myristic acid 15·48%, lauric acid 34·22%, linoleic acid 6·6% and oleic acid 36·66% were obtained.

Oriza Sativa के भूसी के तेल का अध्ययन

पौधों में चर्बी का मुख्य कार्य भोजन जमा रखना है। तेल पौधों के सभी भागों में पाया जाता है। लेकिन तेल प्रायः बीजों से ही प्राप्त किया जाता है। हिप्पोफी रामनोआइडस (Hippophae Rhamnoides) के छाल से 3% तेल तथा क्रेटिगस आक्सी एकैन्थस (Crataegus-oxycanthus) की छाल या हाथार्न से भी तेल निकाला गया है। शोध के पश्चात् ज्ञात हुआ है कि सागौन की लकड़ी में 5% तथा साखू की लकड़ी में 2% तेल विद्यमान है। धान तथा गेहूँ की भूसियों से भी क्रमशः 2% और 2·5% तेल प्राप्त किये गये। यह एक रुचिकर विषय है कि चावल में केवल 1% तेल तथा धान की भूसी में 2% तेल पाया जाता है। बीजों के छिलकों में कीटाणु नाशक पदार्थ विद्यमान होने की सम्भावना है क्योंकि ये बीजों की रक्षा करते हैं। तेल में फासफोलिपिड फासफेटाइड, ग्लाइकोलिपिड और सल्फोलिपिड पाये जाते हैं तथा उनमें से कुछ औषधियों के रूप में प्रयोग किये जाते हैं। धान के भूसी के तेल में सिफेलिन नामक फासफोलिपिड मिलता है जो मस्तिष्क के तन्तुओं की वृद्धि करता है। तेल में विटामिन भी पाये जाते हैं, जो मानव शरीर के क्रिया कलापों पर नियंत्रण रखते हैं और उनकी कमी से मानव शरीर में अनेक प्रकार के रोग हो जाते हैं। यहाँ अनुसंधान द्वारा धान के भूसी के तेल के असाबुनीकृत भाग में 11, डीआक्सीकारटिकोस्टेरोन हारमोन, फेरुलिक अम्ल, काप्रोस्टेन ज्ञात किये गये।

प्रयोगात्मक

धान की भूसी (Oriza sativa husk) को साक्सलेट में लेकर पेट्रोलियम ईथर के साथ जल उष्मक के ऊपर 18 घंटे तक रिफलक्स किया। पेट्रोलियम ईथर में तेल घुल गया तथा इसका आसवन करने से तेल और पेट्रोलियम ईथर अलग किया गया। तेल के भाप आसवन से ज्ञात हुआ है कि इसमें इसेन्सियल आयल नहीं थे बल्कि इसमें अम्ल मुक्त अवस्था में विद्यमान था। तेल में इसका 15 गुना ऐसीटोन डाल कर रातभर रख दिया जिससे एक ठोस पदार्थ अलग हुआ जो फासफोलिपिड (19·1%) था। इसको ऐबसोलूट ऐल्कोहल में घोला। घुले भाग से लेसिथिन तथा अघुलनशील भाग से सिफेलिन प्राप्त हुये।

उपरोक्त विधि से प्राप्त तेल को शुद्ध कर इसका रसायनिक संघटन ज्ञात करने पर साबुनीकरण संख्या[5–6] 145·30, आयोडीन संख्या[7] 59·06, अम्ल संख्या 18·58 और हेह्नर संख्या 64·37 पाया गया। पूरे तेल (150 ग्राम) को लेकर ऐल्काहलिक कास्टिक पोटाश के साथ इसका साबुनीकरण किया तथा असाबुनीकृत भाग (18·50%) को ईथर में घोल कर पृथक कर दिया।

साबुनीकृत पदार्थ

साबुनीकृत पदार्थ के विलयन को ईथर के साथ निष्कर्षित कर लेते हैं जिससे कि बचा हुआ असाबुनीकृत पदार्थ पृथक हो जाय। तत्पश्चात् साबुन के घोल की क्रिया तनु हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के साथ कराई गई जिसके फलस्वरूप वसा अम्ल अलग हो गये तथा इन्हें पृथकीकरण कीप द्वारा पृथक कर आसुत जल से कई बार धोया और इसमें सोडियम सल्फेट डालकर ईथर को सुखाया। ईथर के घोल का आसवन

करके ईथर को अलग कर दिया तथा वसा अम्लों को प्राप्त किया (64·37%) इनकी साबुनीकरण संख्या 255 और आयोडीन संख्या 32·03 ज्ञात किया गया।

ट्विटचेल (Twitchell) के लेड लवण ऐल्कोहल [3] विधि द्वारा अम्लों को ठोस और द्रव वसा अम्लों में पृथक किया जो क्रमशः 20% और 80% थे। ठोस वसा अम्ल की साबुनीकरण संख्या 195, आयोडीन संख्या 30·80 और साबुनीकरण तुल्यांक 287·7 थी। द्रव वसा की साबुनीकरण संख्या 288·83, आयोडीन संख्या 53·20 और साबुनीकरण तुल्यांक 195·50 ज्ञात की गई।

द्रव वसा अम्ल का अध्ययन

8 ग्राम द्रव वसा अम्ल लेकर लैपवर्थ और मोथ्रम (Mothram) विधि द्वारा (4) पोटेशियम परमैन्गनेट द्वारा आक्सीकरण किया जिसके फलस्वरूप डाई हाइड्राक्सी स्टियरिक अम्ल (गलनांक 169-170°), पाया गया। इससे यह निष्कर्ष निकला कि इसमें ओलीक और लीनोलीक अम्ल हैं जबकि लीनोलेनिक अम्ल पूर्णरूप से अनुपस्थित है।

मेथिल ईस्टर का बनाना : द्रव वसा अम्ल के चार गुने मेथिल ऐल्कोहल को हाइड्रोक्लोरिक अम्ल गैस से सम्पृक्त किया तथा द्रव वसा अम्ल को इसके साथ 24 घंटे तक रिफलक्स किया। इसमें सोडियम कार्बोनेट घोल डालकर अच्छी तरह हिलाया। जिससे असाबुनीकृत द्रव वसा अम्ल सोडियम लवण में परिवर्तित हो जाँय। इसे आसुत जल से कई बार धोकर सोडियम लवण दूर कर दिया तथा द्रव अम्ल के मेथिल ईस्टर को सुखाया जो 11·8195 ग्राम था।

उसका आंशिक आसवन, वैकुअम पम्प की सहायता से 5 मी० मी० दाब तथा 10° से० ग्रे० तापक्रम के अन्तर पर चार प्रभाजों में पृथक कर लिया और प्रत्येक प्रभाज की साबुनीकरण संख्या और आयोडीन संख्या ज्ञात की जो निम्न सारिणी में प्रदर्शित है।

सारणी 1

प्रभाज	तापक्रम (से० ग्रे०)	भार (ग्राम)	साबुनीकरण तुल्यांक	आयोडीन संख्या
1	155-165	2·1230	226·50	30·00
2	165-175	2·5485	245·00	45·00
3	175-185	2·7216	256·00	48·50
4	185-195	4·4264	274·87	52·20

आसवन में नष्ट मेथिल ईस्टर=0·1449 ग्राम

प्रत्येक भाग के वसा अम्लों के ईस्टर की प्रतिशत तथा वसा अम्लों की प्रतिशत मात्रायें गणना द्वारा ज्ञात किया जो सारिणी 2 में प्रदर्शित हैं।

सारणी 2

द्रव-वसीय अम्लों का संघटन

प्रभाज	मेथिल ओलियेट (ग्राम)	मेथिल लीनोलियेट (ग्राम)	मेथिल लारेट (ग्राम)	मेथिल मिरिस्टेट (ग्राम)	मेथिल पामीटेट (ग्राम)	मेथिल स्टियरेट (ग्राम)	ओलीक अम्ल (प्रतिशत)	लीनोलीक अम्ल (प्रतिशत)	लारिक अम्ल (प्रतिशत)	मिरिस्टिक अम्ल (प्रतिशत)	पामीटिक अम्ल (प्रतिशत)	स्टियरिक अम्ल (प्रतिशत)
1.	·0732	33·35	1·7130	·0033	...	...	3·20	14·95	75·41	0·14	...	
2.	·9661	18·57	1·3882	·0085	...	...	36·10	6·94	51·09	0·32	...	
3.	1.1613	...	1·1001	·4602	...	...	40·62	...	37·78	16·03	...	
4.	2·7001	...	...	1·5704	0·1559	...	58·07	...	...	33·12	3·34	

सारणी 3

ठोस वसीय अम्लों का संघटन

प्रभाज	मेथिल ओलियेट (ग्राम)	मेथिल लीनोलियेट (ग्राम)	मेथिल लारेट (ग्राम)	मेथिल मिरिस्टेट (ग्राम)	मेथिल पामीटेट (ग्राम)	मेथिल स्टियरेट (ग्राम)	ओलीक अम्ल (प्रतिशत)	लीनोलीक अम्ल (प्रतिशत)	लारिक अम्ल (प्रतिशत)	मिरिस्टिक अम्ल (प्रतिशत)	पामीटिक अम्ल (प्रतिशत)	स्टियरिक अम्ल (प्रतिशत)
1.	...	·2776	·2614	0·5442	...	...	...	25·87	23·91	50·22	...	...
2.	...	·9477	2·0958	0·1269	...	...	...	30·27	65·72	4·01	...	...
3.	0·3987	...	0·0700	...	·5601	...	38·92	...	6·69	...	54·39	...
4.	0·8558	...	...	...	1·3400	·42818	32·78	...	...	...	51·06	16·16

ठोस अम्ल का अध्ययन

ठोस वसा अम्ल (7·9 ग्राम) का मेथिल ईस्टर उसी प्रकार बनाया जिस प्रकार कि द्रव वसा अम्ल का मेथिल ईस्टर बनाया गया था। 6·5 मी० मी० दबाव पर इसका आंशिक आसवन किया और 10° से० ग्रे० तापक्रम के अन्तर पर चार प्रभाजकों में पृथक कर लिया तथा उनकी साबुनीकरण संख्या और आयोडीन संख्या[4] ज्ञात की जो सारिणी 3 में प्रदर्शित है।

सारिणी 4

प्रभाज	तापक्रम (से० ग्रे०)	मेथिल ईस्टर का भार (ग्राम)	साबुनीकरण तुल्यांक	आयोडीन संख्या
1	150-160	1·0832	222·00	44·20
2	160-170	3·1704	235·80	38·10
3	170-180	1·0288	274·00	33·20
4	180-ऊपर	2·6176	284·20	28·00

आसवन में नष्ट मेथिल ईस्टर की मात्रा=0·1000 ग्राम

प्रत्येक प्रभाज के वसा अम्लों के ईस्टर की प्रतिशत मात्रा और वसा अम्लों की प्रतिशत मात्रा गणना द्वारा ज्ञात की जो सारिणी (3) में प्रदर्शित है।

इसके पश्चात् उपर्युक्त प्रयोगों के आधार पर गणना द्वारा वसीय अम्लों के मिश्रण का प्रतिशत संघटन ज्ञात किया जो सारिणी (5) में प्रदर्शित है।

सारिणी 5

वसीय अम्लों के मिश्रण का प्रतिशत संघटन

अम्ल का नाम	स्टियरिक अम्ल	पामिटिक अम्ल	मिरिस्टिक अम्ल	लारिक अम्ल	लीनोलीक अम्ल	ओलीक अम्ल
प्रतिशत मात्रा	0·89	9·06	15·48	34·22	6·67	36·68

प्राय: तेल में हारमोन नहीं पाये जाते लेकिन धान के भूसी के तेल से 11 डी० आक्सीक।रटिको-स्टेरोन नामक हारमोन प्राप्त किया गया जो बहुत ही महत्वपूर्ण है। तेल के असाबुनीकृत भाग की मात्रा अधिक होने के कारण इसका उपयोग उपर्युक्त हारमोन प्राप्त करने में किया जा सकता है। असाबुनीकृत भाग से फेरुलिक अम्ल और काप्रोस्टेन भी अधिक मात्रा में प्राप्त किये जा सकते हैं। धान के तेल में फास-फोलिपिड की प्रतिशत मात्रा अधिक होने के कारण इसका उपयोग सिफेलिन तैयार करने में हो सकता

है। तेल के साबुनीकृत भाग से स्टियरिक, पामिटिक, मिरिस्टिक, लारिक, लीनोलिक और ओलिक अम्लों प्राप्त किये जा सकते हैं।

निर्देश

1. वी० रुचकिन मासलोब। — **शीर० डेलो**, 1937, **2**, 47
2. एन० के० सरकार, जी० चटर्जी एवं रेनुका बनर्जी। — **ज० मिशिगन स्टेट मेडि० सोसइटी**, 1957, **56**, 1451.
3. ट्विटचेल, ई०। — **जर्न० इन्ड० केमि०** 1921, **13**, 806.
4. ह्वोल्डे, डी० एवं म्यूलर, ई०। — The Examination of Hydro Carbon oils and Saponifiable Fats and Waxes, **प्रथम संस्करण**, 1915, **पृ०** 343.
5. कीस्ट्फर। — **ज० रा० क० अनल० केम०**, 1879; **18**, 199.
6. जेमाइसन, जी० एस०। — "Vegitative fats and oils" **अमेरिकन केमिकल सोसाइटी, मोनोग्राफ सीरीज इन्डियन, एडीसन**, 1943, 389.
7. वही। — **एसोशियेशन, आफीशियल, अग्रीकलचर केमिस्ट्स**, "Methods for analysis" 1925, 287.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 1, January 1970, Pages 31-36

समैरियम आइसोप्रोपाक्साइड की एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट तथा डाइमेडान के साथ अभिक्रियायें

एम० हसन, एस० एन० मिश्रा तथा आर० एन० कपूर
रसायन विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—दिसम्बर 16, 1968]

सारांश

समैरियम आइसोप्रोपाक्साइड के साथ एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट तथा डाइमेडान को विभिन्न मोलर अनुपातों में मिलाकर पहली बार निर्जल ट्राइलिगैंडों (लिगैंड=एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट तथा डाइमेडान) को समैरियम के मिश्रित आइसोप्रोपाक्सी लिगैंड व्युत्पन्नों के साथ साथ प्राप्त किया गया है। जब इन एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट व्युत्पन्नों को तृतीयक ब्यूटैनाल के द्वारा उपचारित किया गया तो इनका आइसोप्रोपाक्सी समूह तृतीयक ब्यूटाक्साइड समूह के द्वारा पुनः स्थापित होते पाया गया। मिश्रित आइसोप्रोपाक्सी तथा ब्यूटाक्सी व्युत्पन्न बेंजीन में विलेय पाये गये। अणुभार निश्चयनों से यह ज्ञात हुआ है कि क्वथन करते हुये बेंजीन में ये बहुलकी हैं।

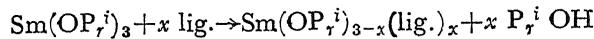
Abstract

Reactions of samarium isopropoxide with ethyl-1-methyl acetoacetate and dimedone. *By* M. Hasan, S. N. Misra and R. N. Kapoor, Chemical Laboratories, University of Jodhpur.

Anhydrous triligands (lig=ethyl-1-methyl acetoacetate and dimedone) along with mixed ispropoxy ligand derivatives of samarium have been prepared for the first time by reacting samarium isopropoxide with ethyl-1-methyl acetoactate and dimedone in different molar ratios. The ethyl-1-methyl acetoacetate derivatives were found to interchange their isopropoxy group with tertiary butoxide group when treated with tertiary butanol. The mixed isopropoxy and butoxy derivatives were found to be soluble in benzene. Molecular weight determinations showed them to be polymeric in boiling benzene.

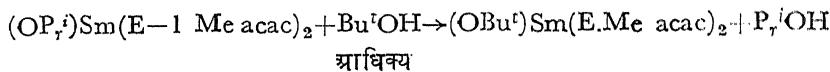
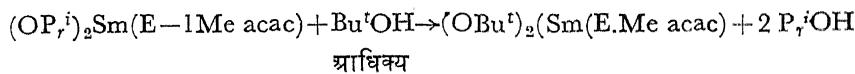
लैंथाननों के β-डाइकीटोनों एवं β-कीटोस्एटर व्युत्पन्नों के साथ इस प्रयोगशाला में जो कार्य किया जा चुका है[1-3] उसी के आगे समैरियम के एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट तथा डाइमेडान व्युत्पन्न तैयार किये गये हैं।

जब समैरियम आइसोप्रोपाक्साइड तथा एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट एवं डाइमेडान (5,5 डाइ-मेथिल 1, 3-साइक्लोहेक्सेन डाइओन) के विभिन्न मोलर अनुपातों में बेंजीन विलयन में अभिक्रियाएँ कराई गईं तो वे ऊष्माक्षेपी देखी गयीं। इसके फलस्वरूप $Sm\ (OP_x{}^i)_{3-x}(lig)_x$ प्रकार केयौगिक प्राप्त हुये। प्राप्त उत्पादों के विश्लेषण के आधार पर इन अभिक्रियाओं को निम्नांकित समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है :

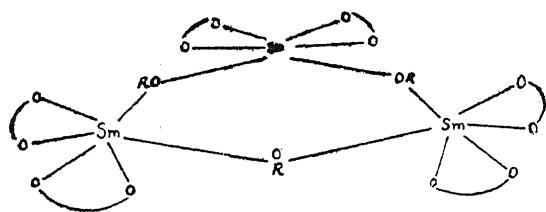
$$Sm(OP_r{}^i)_3 + x\ lig. \rightarrow Sm(OP_r{}^i)_{3-x}(lig.)_x + x\ P_r{}^i\ OH$$

(जहाँ lig.=एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट अथवा 5–5 डाइमेथिल-1,3-साइक्लोहेक्सेन डाइओन)

पुनः बेंजीन की उपस्थिति में समैरियम के मोनो तथा डाइ प्रतिस्थापित एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट व्युत्पन्नों की *t*-ब्यूटिल ऐल्कोहल के साथ ऐल्कोहली-अपघटन अभिक्रियाओं से संगत तृतीयक ब्यूटाक्साइड व्युत्पन्न निर्मित करने की सुविधाजनक विधि प्राप्त हो गई। इन अभिक्रियाओं को निम्नांकित समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है :—

$$(OP_r{}^i)_2Sm(E-1Me\ acac) + \underset{\text{आधिक्य}}{Bu^tOH} \rightarrow (OBu^t)_2(Sm(E.Me\ acac) + 2\ P_r{}^iOH$$

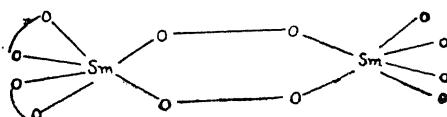
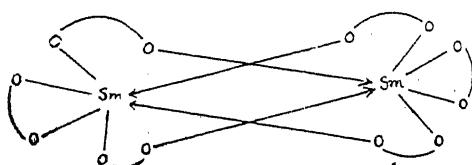
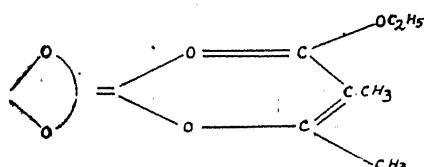
$$(OP_r{}^i)Sm(E-1\ Me\ acac)_2 + \underset{\text{आधिक्य}}{Bu^tOH} \rightarrow (OBu^t)Sm(E.Me\ acac)_2 + P_r{}^iOH$$

एथिल–1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट व्युत्पन्न हल्के पीले क्रिस्टलीय ठोस हैं जो बेंजीन में अत्यधिक विलेय हैं किन्तु डाइमेडान व्युत्पन्न गुलाबी चूर्ण के रूप में प्राप्त होते हैं जो बेंजीन में प्रायः विलेय हैं। जब इन यौगिकों को आसवित करने का प्रयत्न किया गया तो ये विघटित हो गये।

मोनो एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट समैरियम डाइ आइसोप्रापाक्साइड यौगिक का अणु-भार ज्ञात करने पर (क्वथनांकमितीयतः) क्वथन करते बेंजीन में यह पंचलक जान पड़ा किन्तु संगत ब्यूटाक्साइड साइड व्युत्पन्न द्विलक के रूप में प्राप्त हुआ जो दो प्रशाखित तृतीयक ब्यूटाक्साइड समूहों के कारण सम्भव है।

मोनो आइसोप्रोपाक्सी एवं मोनोब्यूटाक्सी डाइ एथिल–1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट व्युत्पन्न त्रिलक के रूप में प्राप्त हुये। इनकी सम्भावित संरचना निम्नांकित हो सकती है जिसमें ऐल्काक्सी समूहों के तीन ऑक्सीजन परमाणु तीन समैरियम अष्टफालकों के साथ सेतुबन्धित होंगे :

Where R = OPr^i or OBu^t

जहाँ R=OP_r^i या OBu^t.

फिर भी अन्य संरचनायें, जिनमें समैरियम की उपसंसोजक संख्या 6 से अधिक हो सकती है, सम्भावित हैं।

ट्राइएथिल–1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट व्युत्पन्न द्विलकी ज्ञात हुआ अतः उसकी संरचना

होगी जहाँ दो धातु अष्टफलक लिगेंड अणु के आक्सीजन परमाणुओं द्वारा सेतुबन्धित होते हैं। किन्तु फिर भी निम्नांकित संरचना की संभावना असिद्ध नहीं होती

जहाँ लिगेंडों के आक्सीजन परमाणुअ धातु परमाणु के रिक्त $d\pi$ कक्षकों (आर्बिटल) को इलेक्ट्रान प्रदान करते हैं जहाँ

सारणी 1 एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट तथा डाइमेडान के साथ समैरियम ग्राइसोप्रोपाक्साइड की ग्रभिक्रियाएँ

ग्राइसोप्रोपाक्साइड	लिगैण्ड	मोलर ग्रनुपात	निर्मित उत्पाद, प्राप्ति एवं ग्रवस्था	ऐजियोट्रोप में Pr^iOH		धातु %		ग्रणुभार	
				ज्ञात	परिगणित	ज्ञात	परिगणित	ज्ञात	परिगणित
एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट									
1·0278	0·4506	1 : 1	$Sm(OPr^i)_2(C_7H_{11}O_3)$ (1·23 g.) हल्के पीले रंग का ठोस, बेंजीन में विलेय	0·18	0·188	36·1	36·52	2057	412
1·0735	0·9468	1 : 2	$Sm(OPr^i)(C_7H_{11}O_3)$ (1·58g.) हल्का पीला ठोस, बेंजीन में विलेय	0·38	0·393	30·0	30·32	1440	496
1·2042	1·5802	1 : 3	$Sm(C_7H_{11}O_3)_3$ (2·1g.) हल्का पीला ठोस, बेंजीन में विलेय	0·64	0·662	25·48	25·92	1197	580
डाइमेडान									
1·4227	0·6087	1 : 1	$Sm(OPr^i)_2(C_8H_{11}O_2)_2$ (1·61g.) गुलाबी ठोस, बेंजीन में ग्रविलेय	0·26	0·26	36·0	36·87	...	...
1·2801	1·0940	1 : 2	$Sm(OPr^i)(C_8H_{11}O_2)_2$ (1·84g.) गुलाबी चूर्ण, बेंजीन में ग्रविलेय	0·47	0·47	29·8	30·8	...	...
1·1201	1·4391	1 : 3	$Sm(C_8H_{11}O_2)_3$ (1·87g.) गुलाबी चूर्ण, बेंजीन में ग्रविलेय	0·60	0·61	26·6	26·47	...	...

सारणी 2 तृतीयक ब्यूटिल ऐल्कोहल के साथ पुनः स्थापन

यौगिक	Bu^tOH (ग्रा०)	निर्मित उत्पाद, प्राप्ति तथा ग्रवस्था	ऐजियोट्रोप में Pr^iOH		धातु %		ग्रणु भार	
			ज्ञात	परिगणित	ज्ञात	परिगणित	ज्ञात	परिगणित
$Sm(OPr^i)_2$(E-1Meac. ac) (1·0072 g.)	0·88 ग्राधिक्य	$Sm(OBu^t)_2(C_7H_{11}O_3)$ (1·30 g.) हल्का पीला ठोस, बेंजीन में विलेय	0·26	0·275	33·7	34·17	790	440
$Sm(OPr^i)$(E-1Meac ac) 1·2038 g.)	0·54 ग्राधिक्य	$Sm(OBu^t)(C_7H_{11}O_3)_2$ (1·81 g.) हल्का पीला ठोस, बेंजीन में विलेय	0·22	3·221	29·0	29·48	1515	510

प्रयोगात्मक

प्रयोग में व्यवहृत विधियाँ, अभिकर्मक तथा वैश्लेषिक विधियाँ पूर्ववर्णित [1 4 5 6] विधियों के समान ही रखी गई हैं।

1. एथिल–1-मेथिल एसीटोऐसीटेट के साथ समैरियम आइसोप्रोपाक्साइड की अभिक्रिया 1:2

एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट (0·9468ग्रा०) को समैरियम आइसोप्रोपाक्साइड (1·0735ग्रा०) के साथ मिलाने पर ऊष्माक्षेपी अभिक्रिया देखी गई। अभिक्रिया मिश्रण को प्रभाजी स्तम्भ के अन्तर्गत 3-4 घन्टे तक पश्चवाहित किया गया तथा बेंजोन आइसोप्रोपैनाल के द्विक ऐजियोट्रोप को 72-80° में पर एकत्र कर लिया गया। इस यौगिक को प्रह्रासित दाब के अन्तर्गत सुखाया गया। इससे एक हल्के पीले रंग का क्रिस्टलीय ठोस (1.58 ग्रा०) प्राप्त हुआ जो बेंजीन में विलेय था।

प्राप्त : ऐजियोट्रोप में आइसोप्रोपैनाल 0·38 ग्रा०। जब कि दो मोल के लिये 0·393 ग्रा० की आवश्यकता होगी।

प्राप्त : Sm, 30·0%, अणु-भार 1440.

परिगणित : $Sm(OPr^i)(C_7H_{11}O_3)_2$ के लिये Sm, 30·32% अणुभार 496.

एथिल–1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट तथा डाइमेडान के साथ अन्य अभिक्रियायें सारणी 1 में अंकित हैं।

2. समैरियम मोनो आइसोप्रोपाक्सी डाइ एथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट तथा तृतीयक ब्यूटैनाल के मध्य अभिक्रिया

समैरियम मोनोआइसोप्रोपाक्सी डाइएथिल-1-मेथिल ऐसीटोऐसीटेट (1·2038 ग्रा०) के बेंजीन विलयन में ब्यूटैनाल (आधिक्य) मिलाया गया।

अभिक्रिया मिश्रण को एक स्तम्भ के नीचे 5-6 घन्टे तक पश्चवाहित किया गया। इससे ऐजियो-ट्रोप मन्द गति से एकत्र हो गया। जब बेंजीन विलेय हल्के पीले रंग का क्रिस्टलीय ठोस (1·81 ग्रा०) प्राप्त हो गया तो अधिक विलायक को आसवित कर दिया गया।

एक तुल्यांक ऐजियोट्रोप में आइसोप्रोपैनाल (0·22 ग्रा०) के पुनः स्थापन के लिए 0·220 ग्रा० की आवश्यकता होती है।

ज्ञात : Sm, 29·0% अणुभार, 1515

परिगणित : $Sm(OBu^t)(C_7H_{11}O_3)$ के लिये Sm, 29·48% अणुभार 510.

अन्य विनिमय अभिक्रियायें सारणी 2 में सारणीबद्ध हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से एक (एम० हसन) को सी० एस० आई० आर० से शोध छात्रवृत्ति प्राप्त हुई जिसके लिये वे अभारी हैं। राजस्थान विश्वविद्यालय के प्रो० आर० सी० मेहरोत्रा को शोध विषय पर सुझावों के लिये एवं जोधपुर विश्वविद्यालय के रसायन विभाग के अध्यक्ष डा० आर० सी० कपूर को शोध सुविधायें प्रदान करने के लिये हम धन्यवाद देते हैं।

निर्देश

1. संखला बी० एस० तथा कपूर आर० एन०। **जर्न० लेस कामन मेटल्स**, 1965, **10**, 116; **कनैडियन जर्न केमि०**, 1965, **44**, 1369; **आस्ट्रे० जर्न० केमि०** 1967, **20**, 685.
2. मेहरोत्रा, आर० सी०, मिश्रा, एस० एन० तथा मिश्रा, टी० एन०। **इण्डियन जर्न केमि०**, 1965,**3**,525;1967,**5**,372.
3. हसन, एम०, कुमार, के० तथा मिश्रा, एस० एन०। **बुले० केमि० सोसा० जापान (मुद्राणार्थ)** (1968).
4. ब्रैडली, डी० सी०, हालिम, एफ० एम० ए०, तथा वार्डला, डब्लू०। **जर्न० केमि० सोसा०**, 1950,3450.
5. मेहरोत्रा, आर० सी०। **जर्न इण्डियन केमि० सोसा०**, 1954,**31**,904.
6. संखला, बी० एस०, मिश्रा, एस० एन० तथा कपूर, आर० एन०। **केमि० एण्ड इण्डस्ट्री**, 1965,382.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 1, January 1970, Pages 37-48

अयस्कों तथा खनिज पदार्थों में परमाणविक अवशोषण विधि द्वारा ताँबे का मात्रात्मक निश्चयन तथा ताँबे के विश्लेषण पर अन्तरातात्विक अवशोषण प्रभाव का अध्ययन

इन्द्रपाल सिंह तथा धर्मेन्द्र नाथ विश्नोई
भारतीय भूगर्भ सर्वेक्षण विभाग, नागपुर

[प्राप्त–अगस्त 19,1969]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में अयस्कों तथा खनिज पदार्थों में ताँबे के निश्चयन हेतु परमाणविक अवशोषण विधि का उल्लेख किया गया है। उन समस्त तत्वों का, जिनकी स्पेक्ट्रल रेखायें विश्लेषात्मक रेखा के दोनों ओर 20A° की दूरी तक पाई जाती हैं, ताँबे के निश्चयन पर अन्तरातात्विक व्यतिक्रमण प्रभाव का अध्ययन पूर्ण रूप से किया गया है। ताँबे के अयस्कों तथा खनिज पदार्थों में पाये जाने वाले अनेक तत्वों की उपस्थिति के प्रभाव का भी ताँबे के निश्चयन पर विस्तारपूर्वक अध्ययन किया गया है। इस विधि में अवमिश्रण द्वारा संभावित विभ्रमियों तथा विधि की पुनरुत्पादिता की भी जाँच की गई है जो कि सन्तोषजनक है। प्रस्तावित विधि, अयस्कों तथा खनिज पदार्थों में ताँबे के निश्चयनार्थ बाह्य तत्वों के व्यतिक्रमण से सर्वथा रहित है तथा इन पदार्थों में ताँबे के निश्चयन के लिए अत्यन्त उपयुक्त पाई गई है। राजस्थान (भारत) से प्राप्त कुछ अयस्कों में इस विधि द्वारा ताँबे का निश्चयन किया गया है।

Abstract

Quantitative determination of copper in ores and minerals by atomic absorption spectroscopy and study of inter-element absorption effect on copper analysis. *By* Indra Pal Singh and Dharmendra Nath Vishnoi, Geological Survey of India, Nagpur.

An atomic absorption method for determination of copper in ores and minerals has been described. Inter-element interference effect on copper from all the elements whose spectral lines fall 20 A° on either side of 3247 A°, the analysis line of copper, has been studied thoroughly. The interference effect on copper from various

elements likely to be encountered in common copper ores and minerals has also been studied in detail. Dilution error and the reproducibility of the method have been checked and found to be satisfactory. The proposed method has been found free from extraneous element interference effects and is suitable for determination of copper in ores and minerals. The same has been used for copper determination in certain ores from Rajasthan.

विषय प्रवेश

परमाणविक-अवशोषण विधि का प्रयोग रासायनिक विश्लेषण के हेतु दिन-प्रति-दिन बढ़ता ही जा रहा है क्योंकि यह विधि अन्य विधियों से सरल तथा प्रकृष्ट सिद्ध हुई है।[1 2 3 4] परमाणविक अवशोषण विधि, उत्सर्जन विधि से रासायनिक विश्लेषण के हेतु इस कारण भी प्रकृष्ट है कि इस विधि में ज्वाला के ताप विचरण का कोई प्रभाव नहीं पड़ता तथा यह बाह्य तत्वों के प्रभाव से भी सर्वथा रहित ही है। अन्तिम उल्लिखित गुण के कारण ही यह विधि अयस्कों तथा खनिज पदार्थों में तत्वों की लघु तथा लेश मात्रा ज्ञात करने में, जिनमें अनेक तत्व प्रमुख मात्रा में भी रहते हैं, अत्यन्त सहायक सिद्ध हुई है।

पादप भस्म में ताँबे की मात्रा ज्ञात करने के लिए डेविड[5] ने परमाणविक अवशोषण विधि के प्रयोग का उल्लेख किया है। इस सम्बन्ध में उनके अनुसार यह विधि इस कार्य में सन्तोषजनक नहीं प्रतीत हुई, इसका कारण उन्होंने तंत्र की कुछ मूल त्रुटियाँ दी हैं तथा उनके अनुसार इस विधि से इस सम्बन्ध में जो परिणाम प्राप्त हुए हैं वे विश्वसनीय नहीं हैं। जहाँ तक लेखकों को ज्ञात है, इस विधि का अयस्कों तथा खनिज पदार्थों मे ताँबे की मात्रा ज्ञात करने का कोई गहन प्रयास नहीं किया गया है, इसी कारण प्रस्तुत अनुसंधान अयस्कों तथा खनिज पदार्थों में ताँबा ज्ञात करने की परमाणविक अवशोषण विधि के प्रामाणीकरण हेतु किया गया है।

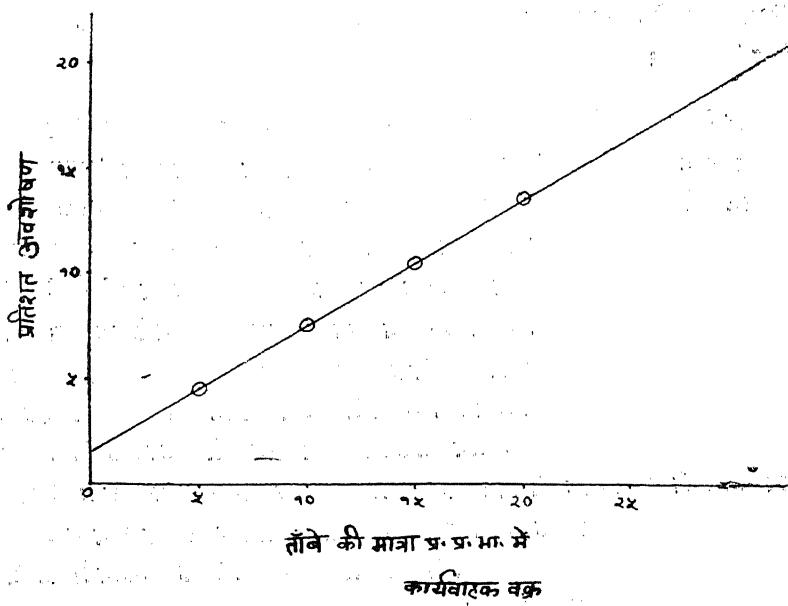
सैद्धान्तिक रूप से देखने पर ज्ञात होता है कि परमाणविक अवशोषण विधि पर बाह्य तत्वों का कोई प्रभाव नहीं होना चाहिए, परन्तु इस तथ्य की संपरीक्षात्मक पुष्टि अभी पूर्णरूपेण नहीं हो पाई है। यह देखा गया है कि अनेक तत्वों की अति प्रचंड रेखायें अधिकतम अवशोषण को नहीं दर्शाती हैं, इस कारण ऐसा प्रतीत होता है कि अल्प प्रचंड रेखाओं द्वारा भी अवशोषण संभव है, जोकि विश्लेषण कार्य में बाधक हो सकता है। इसके अतिरिक्त कुछ तत्व अधिमान्य विक्षुब्धीकरण अथवा ज्वाला के ताप इत्यादि को गिरा कर अनुसंधानाधीन मूलकों का निष्कासन तथा दमन भी करते हैं। इस कारण ऐसे समस्त संभाव्य तत्वों का प्रभाव जो कि अवशोषण विधि को किसी न किसी रीति से प्रभावित कर सकते हैं, इस अनुसंधान द्वारा परिपूर्णतया अध्ययन करने का प्रयत्न किया गया है।

संपरीक्षात्मक विधि

यूवीस्पेक एच 700 स्पेक्ट्रो फोटोमीटर जिसमें हिल्जर का एच 909/1100 परमाणविक अवशोषण उपयोजन सम्प्रयुक्त है, अवशोषण के मापन के लिये प्रयुक्त हुआ है। संपरीक्षात्मक विधि का ब्योरा वही है जो एक लेखक[6] ने अपने पूर्व प्रपत्र में दिया है।

मापन आरम्भ करने से पूर्व खोखले कैथोड लैम्प को लगभग तीस मिनट तक चला कर स्थिर उत्सर्जन प्राप्त किया गया था। लैम्प को समुचित रूप से इस प्रकार संरेखित किया गया था कि जिससे संपूर्ण ज्वाला पर अधिकतम प्रचंडता प्राप्त हो सके तथा स्पक्ट्रोफोटोमीटर की तरंग आयाम भेरी को 3247 A° की रेखा पर रखा गया था। सम्पूर्ण परीक्षण में निम्नलिखित परीक्षण स्थितियाँ स्थायी रूप से स्थिर की गई थीं।

स्लिट की चौड़ाई	0·15 मि॰मी॰
दाब	100 पौ॰ प्र॰ व॰ इंच
गैस	बरशेन
गैस दाब	2 पौ॰ प्र॰ व॰ इंच
लैम्प धारा	19 मि॰ ए॰
फोटो सेल	U. V. फोटोसेल

सर्वप्रथम $CuSO_4.5H_2O$ (G.R.) के प्रयोग से ताँबे का प्रामाणिक विलयन बनाया गया। उपर्युक्त यौगिक की 0·393 ग्राम मात्रा को आसुत जल में घोलकर इसका आयतन 100 मिली॰ कर लिया गया जिससे इस विलयन में ताँबे की मात्रा 1000 प्रति प्रयुत भाग (ppm.) हो सके। इस मूल विलयन से ही निम्न सान्द्रता वाले विलयन जिनमें ताँबे की मात्रा 5, 10, 15 तथा 20 प्रति प्रयुत भाग थी बनाये गए।

कार्यवाहक वक्र

एक एक करके प्रत्येक प्रामाणिक विलयन को ज्वाला में फुहार कर प्रत्येक बार अवशोषण की माप ले ली गई। इसी अध्ययन से यह ज्ञात हुआ कि इस विधि में 5 से 20 प्रति प्रयुत भाग वाले ताँबे के विलयन का

ही अध्ययन संभव है, अर्थात् सान्द्रता सीमा 5 से 20 प्रति प्रयुत भाग है । ताँबे की सान्द्रता तथा प्रतिशत अवशोषण द्वारा कार्यवाहक वक्र तैयार किया गया । जिन न्यादर्शों में ताँबे की मात्रा ज्ञात करनी थी उनको भी इसी प्रकार ज्वाला में फुहार कर उनका अावशोषण माप लिया गया तथा कार्यवाहक वक्र की सहायता से ताँबे की मात्रा ज्ञात की गई । कार्यवाहक वक्र चित्र 1 में दिखाया गया है ।

Fe, Ni, Co, Mn, Pd, Sn, Zn, Pb, Te, Ti Sb, Si, Al, In, Cd, Pt, Ir, Rh, Cr, B, Na, K, Ca, Mg, Ag, तथा Au के प्रभाव

उन ही तत्वों द्वारा व्यतिक्रम संभव है जो न्यादर्श में विद्यमान होते हैं या उन तत्वों से जिनकी स्पेक्ट्रल रेखाएँ चुनी हुई विश्लेषात्मक रेखा के अत्यंत निकट होती हैं । ताँबे के अयस्कों तथा खनिजों के जो न्यादर्श इस प्रयोगशाला में प्राप्त होते रहे हैं उनमें प्राय: Pb, Sn, Zn, Si, Mg, Ca, Na, Al, K, Ni, Co, Fe तथा Ti पाये जाते हैं, तथा M. I. T. सारणी को देखने से ज्ञात होता है कि ऐसे तत्व जिनकी रेखायें विश्लेषात्मक रेखा 3247A° के समीप हैं वे इस प्रकार हैं, Ni, Co, Mn, Pd, Ir, Ti Sb, Te, Fe, Cd, In, Cr, B,* Ta, Li, Tl, Os, La, Eu, Ru, Yt, Tm, Sm, Dy तथा Tb. प्रस्तुत अनुसंधान में उन सब तत्वों के जो ताँबे के अयस्कों में पाये जाते हैं तथा उन तत्वों के जिनकी स्पेक्ट्रल रेखाएं विश्लेषात्मक रेखा 3247A° से 20A° की दूरी पर दोनों ओर आती हैं व्यतिक्रमण का अध्ययन किया गया है । इस प्रयोग में उपर्युक्त तत्वों के व्यतिक्रमण अध्ययन के लिये निम्नलिखित विधि कार्य में लाई गई है ।

प्रत्येक तत्व के यौगिक को जिसके व्यतिक्रमण का अध्ययन करना था सारणी 1 में दिए गए क्रमानुसार तोल कर घोल के विलयन को 100 मिली० कर लिया गया जिससे तत्व का 1000 प्रति प्रयुत भाग वाला विलयन मिल सके । इस मूल विलयन से अब मिश्रण द्वारा 10 से 1000 प्र० प्र० भा० वाले अनेक विलयन बनाए गए तथा प्रत्येक तत्व के लिए एक-एक करके व्यतिक्रमण प्रभाव काअध्ययन किया गया । प्रत्येक परीक्षित तत्व के 10 से 1000 प्र० प्र० भा० के अनेक सम्मिश्रणों से 2 मिली० विलयन लेकर ताँबे के 10 प्र० प्र० भा० वाले 8 मिली० विलयन से मिलाकर अवशोषण को मापा गया । ताँबे का 10 प्र० प्र० भा० विलयन इस कारण लिया गया है क्योंकि यह कार्यवाहक सीमा के लगभग मध्य में आता है । ताँबे के 8 मिली० विलयन में 2 मिली० पानी मिला कर एक निरंक विलयन भी बनाया गया तथा इसके भी अवशोषण का प्रमाणीकरण किया गया और उपर्युक्त तत्वों के सम्मिश्रित विलयन के अवशोषण की इस निरंक विलयन के अवशोषण से तुलना कर यह ज्ञात किया गया है कि इन तत्वों की उपस्थिति का ताँबे के अवशोषण पर क्या प्रभाव पड़ता है । जैसा कि पूर्व प्रपत्र में दिखलाया जा चुका है [8] प्राय: Spec. pure श्रेणी अथवा G. R. श्रेणी के रसायनों को ही इस कार्य में प्रयुक्त किया गया है जो ताम्र से रहित थे ।

---

* इस अनुसंधान में Ta, Li, Eu, Tl, Os, La तथा अन्य Rare earths के विश्लेषण पर प्रभावका अध्ययन नहीं किया जा सका है

सारणी 1

क्र० सं०	तत्व जिसका व्यतिक्रमण अध्ययन किया गया		यौगिक की 100 मिली० विलयन में घुली हुई मात्रा जिसमें तत्व की मात्रा 1000 प्रति प्रयुत भाग है
1.	Fe	0· 144 ग्रा०	Fe_2O_3 (Spec. pure)
2.	Ni	0· 446 ग्रा०	$NiSO_4.6H_2O$ (G. R.)
3.	Co	0· 404 ग्रा०	$CoCl_2.6H_2O$ (A. R.)
4.	Mn	0· 288 ग्रा०	$KMnO_4$ (A.R.)
5.	Pd	0· 267 ग्रा०	$(NH_4)_2PdCl_4$ (Spec.pure)
6.	Sn	0· 190 ग्रा०	$SnCl_2.2H_2O$ (G. R.)
7.	Zn	0· 124 ग्रा०	ZnO (G.R.)
8.	Pb	0· 108 ग्रा०	PbO (A. R)
9.	Te	0· 125 ग्रा०	TeO_2 (Spec. pure)
10.	Ti	0· 167 ग्रा०	TiO_2 (Spec. pure)
11.	Sb	0· 126 ग्र०	Sb_2O_4 (Spec. pure)
12.	Si	0· 214 ग्रा०	SiO_2 (Crystals)
13.	In	0· 121 ग्रा०	In_2O_3 (Spec. pure)
14.	Cd	0· 114 ग्रा०	CdO (Spec. pure)
15.	Pt	0· 228 ग्रा०	$(NH_4)_2PtCl_6$ (Spec. pure)
16.	Ir	0· 247 ग्रा०	$(NH_4)_3IrCl_6.H_2O$ (,,)
17.	Rh	0· 346 ग्रा०	$(NH_4)_3RhCl_6.1\frac{1}{2}H_2O$ (Spec. pure)
18.	Cr	0· 283 ग्रा०	$K_2Cr_2O_7$ (G. R.)
19.	B	0· 881 ग्रा०	$Na_2B_4O_7.10H_2O$ (G. R)
20.	Na	0· 254 ग्रा०	NaCl (G.R.)
21.	K	0· 191 ग्रा०	KCl (G.R.)
22.	Ca	0· 140 ग्रा०	CaO (G.R.)
23.	Mg	0· 166 ग्रा०	MgO (G. R.)
24.	Ag	0· 157 ग्रा०	$AgNO_3$ (G. R.)
25.	Au	0· 181 ग्रा०	NH_4AuCl_4 (Spec. pure)
26.	Al	1· 167 ग्रा०	$Al_2(SO_4)_3.16H_2O$ (A.R.)

न्यादर्शों का विरचन

द्रवण, पाचन तथा अम्ल से संतर्पण इत्यादि की सामान्य विधियाँ[9] ही जिनका अयस्कों के विश्लेषण हेतु किया जाता है, न्यादर्श के विलयन विरचन में प्रयुक्त की गई हैं।

सारणी 2

ताँबे के परमाणविक अवशोषण पर Fe, Ni, Co, Mn, Pd, Sn, Ca, Mg, Al, Zn, Pd, Te, Ti, Sb, Si, In, Cd, Pt, Ir, Rh, Cr, B, Na, K, Ag, तथा Au के व्यतिक्रमण प्रभाव का अध्ययन

तत्व जिसका व्यतिक्रमण अध्ययन किया गया	परिणामी विलयन में अध्ययनार्थ तत्व की मात्रा	प्रतिशत अवशोषण	तत्व जिसका व्यतिक्रमण अध्ययन किया गया	परिणामी विलयन में अध्ययनार्थ तत्व की मात्रा	प्रतिशत अवशोषण
Fe	0 प्र०प्र०भा० (नि० वि०)	6.0	Ni	0 प्र०प्र०भा० (नि० वि०)	6.0
	10 प्र०प्र०भा०	6.0		10 प्र० प्र० भा०	6.0
	20 ,,	6.0		20 ,,	6.0
	100 ,,	6.0		100 ,,	6.0
	200 ,,	6.0		200 ,,	6.0
Co	0 प्र०प्र०भा० (नि०वि०)	6.0	Mn	0 (नि०वि०)प्र०प्र०भा०	5.5
	10 प्र० प्र० भा०	6.0		10 प्र० प्र० भा०	5.5
	20 ,,	6.0		20 ,,	5.5
	100 ,,	6.0		100 ,,	5.5
	200 ,,	6.0		200 ,,	5.5
Pd	0 (नि०वि०)प्र०प्र०भा०	6.0	Sn	0 (नि०वि०)प्र०प्र०भा०	6.0
	10 प्र० प्र० भा०	6.0		10 प्र० प्र० भा०	6.0
	20 ,,	6.0		20 ,,	6.0
	100 ,,	6.0		100 ,,	6.0
	200 ,,	6.0		200 ,,	6.0

तत्व जिसका व्यतिक्रमण अध्ययन किया गया	परिणामी विलयन में अध्ययनार्थ तत्व की मात्रा		प्रतिशत अवशोषण	तत्व जिसका व्यतिक्रमण अध्ययन किया गया	परिणामी विलयन में अध्ययनार्थ तत्व की मात्रा		प्रतिशत अवशोषण
Zn	0	(नि०वि०)प्र०प्र०भा०	5.5	Pb	0	(नि०वि०)प्र०प्र०भा०	6.0
	10	प्र०प्र०भा०	5.5		10	प्र०प्र०भा०	6.0
	20	,,	5.5		20	,,	6.0
	100	,,	5.5		100	,,	6.0
	200	,,	5·5		200	,,	6 0
Te	0	(नि०वि०)प्र०प्र०भा०	5.5	Ti	0	(नि०वि०)प्र०प्र०भा०	6.0
	10	प्र०प्र०भा०	5.5		10	प्र०प्र०भा०	6.0
	20	,,	5.5		20	,,	6.0
	100	,,	5.5		100	,,	6.0
	200	,,	5.5		200	,,	6.6
Sb	0	(नि०वि०)प्र०प्र०भा०	5.0	Si	0	(नि०वि०)प्र०प्र०भा०	5.0
	10	प्र० प्र० भा०	5.0		10	प्र० प्र० भा०	5.0
	20	,,	5.0		20	,,	5.0
	100	,,	5.0		100	,,	5.0
	200	,,	5.0		200	,,	5.0
In	0	,,	6.0	Cd	0	,,	5.0
	10	,,	6.0		10	,,	5.0
	20	,,	6.0		20	,,	5.0
	100	,,	6.0		100	,,	5.0
	200	,,	6.0		200	,,	5.0
Al	0	,,	6.0	Pt	0	,,	6.5
	10	,,	6.0		10	,,	6.5
	20	,,	6.0		20	,,	6.5
	100	,,	6.0		100	,,	6.5
	200	,,	6.0		200	,,	6.5
Ir	0	,,	6.0	Rh	0	,,	5.5
	10	,,	6.0		10	,,	5.5
	20	,,	6.0		20	,,	5.5
	100	,,	6.0		100	,,	5.5
	200	,,	6.0		200	,,	5.5

तत्व जिसका व्यतिक्रमण अध्ययन किया गया	परिणामी विलयन में अध्ययनार्थ तत्व की मात्रा		प्रतिशअ अवशोषण	तत्व जिसका व्यतिक्रमण अध्ययन किया गया	परिणामी विलयन में अध्ययन तत्व की मात्रा		प्रतिशत अवशोषण
Cr	0	(नि०वि०)प्र०प्र०भा०	5.5	B	0	(नि०वि०) प्र०भा०	5.5
	10	प्र० प्र० भा०	5.5		10	प्र० प्र० भा०	5.5
	20	,,	5.5		20	,,	5.5
	100	,,	5.5		100	,,	5.5
	200	,,	5.5		200	,,	5.5
Na	0	,,	5.5	K	0	,,	6.0
	10	,,	5.5		10	,,	6.0
	20	,,	5.5		20	,,	6.0
	100	,,	5.5		100	,,	6.0
	200	,,	5.5		200	,,	6.0
Ca	0	,,	6.0	Mg	0	,,	6.0
	10	,,	9.0		10	,,	6.0
	20	,,	6.0		20	,,	6.0
	100	,,	6.0		100	,,	6.0
	200	,,	6.0		200	,,	6.0
Ag	0	,,	5.5	Au	0	,,	5.5
	10	,,	5.5		10	,,	5.5
	20	,,	5.5		20	,,	5.5
	100	,,	5.5		100	,,	5.5
	200	,,	5.5		200	,,	5.5

सारणी 3 (अ)

न्यादर्शों में ताँबे का निश्चयन

प्रमाणित विलयन में ताँबे की मात्रा	प्रतिशत अवशोषण
5·0 प्र० प्र० भा०	4·5
10·0 ,,	7·5
15·0 ,,	10·5
20·0 ,,	13·5

सारणी 3 (ब)

न्यादर्श संख्या	अवमिश्रण	प्रतिशत अवशोषण	विलयन में ताँबे की मात्रा (कार्यवाहक वक्र द्वारा)	न्यादर्श में ताँबे की मात्रा
1/B	1/2	11·5	16·5 प्र०प्र०भा०	33·0 प्र०प्र०भा०
2/B	1	11·0	16·0 ,,	16·0 ,,
3/B	1	9·0	12·5 ,,	12·5 ,,
4/B	1/4	9·5	13·5 ,,	54·0 ,,
5/B	1/2	7·5	10·0 ,,	20·0 ,,
6/B	1	7·0	9·5 ,,	9·5 ,,
7/B	1/2	8·5	11·5 ,,	23·0 ,,
8/B	1/2	8·0	11·0 ,,	22·0 ,,
9/B	1	6·0	7·5 ,,	7·5 ,,
10/B	1/2	9·5	13·5 ,,	27·0 ,,
11/B	1/2	11·5	16·5 ,,	33·0 ,,
12/B	1/4	9·0	12·5	50·0 ,,

सारणी 4

अवमिश्रण त्रुटि की जाँच

क्र० सं०	मूल विलयन में ताँबे की मात्रा	अवमिश्रण का अनुपात	विलयन में ताँबे की गुणक मात्रा	ताँबे की निश्चित की हुई मात्रा
1.	10,000 प्र० प्र० भा०	$\frac{1}{1000}$	10 प्र० प्र० भा०	10 प्र० प्र० भा०
2.	5,000 ,,	$\frac{1}{1000}$	5 ,,	5 ,,
3.	10,000 ,,	$\frac{1}{2000}$	5 ,,	5 ,,
4.	10,000 ,,	$\frac{1}{500}$	20 ,,	20 ,,

सारणी 5

पुनरुद्गारण जाँच

	न्यादर्श	1/B		2/B		3/B
क्र० सं	प्रतिशत अवशोषरण	ताँबे की निश्चित की गई मात्रा प्र०प्र०भा० में	प्रतिशत अवशोषरण	ताँबे की ज्ञात गई की मात्रा प्र०प्र०भा० में	प्रतिशत अवशोषरण	ताँबे की ज्ञात की गई मात्रा प्र०प्र०भा० में
1	11·5	16·5	11·0	16·0	9·0	12.5
2	11·5	16·5	11·0	16·0	9·0	12·5
3	11.5	16·5	11·0	16·0	9·0	12·5
4	11·5	16·5	11·0	16·0	9·0	12·5
5	11·5	16·5	11·0	16·0	9·0	12·5
6	11·5	16·5	11·0	16·0	9·0	12·5
7	11·5	16·5	11·0	16·0	9·0	12.5
8	11·5	16·5	11·0	16·0	9·0	12·5
9	11·5	16·5	11·0	16·0	9·0	12·5
10	11·5	16·5	11·0	16·0	9·0	12·5

सारणी 6

Fe, Al, Mg, Ca, Si तथा Na की अधिक मात्रा द्वारा ताँबे के व्यतिक्रमण पर प्रभाव

परिणामी विलयन में व्यतिक्रमण तत्व की मात्रा			प्रतिशत अवशोषण
0 प्र० प्र० भाग (निरंक विलयन)			6.0
2,000	प्र०प्र०भा०	Fe	6.0
2,000	,,	Al	6.0
2,000	,,	Mg	6.0
2,000	,,	Ca	6.0
2,000	,,	Si	6.0
2,000	,,	Na	6.0

विवेचना

उपर्युक्त विधि अयस्कों में ताँबे के निश्चित करने हेतु अत्यंत उपयोगी सिद्ध हुई है। विशेषतः इस विधि द्वारा अल्पांश में उपस्थित ताँबे का अति सुगम रीति से विश्लेषण किया जा सकता है। यदि विलयन में ताँबे की मात्रा (5 से 20 प्र० प्र० भा०) अधिक होती है तो मापन से पूर्व अवमिश्रण द्वारा उसे कार्य-वाहक सीमा में लाया जा सकता है। जैसा कि सारणी 4 में दिखालाया गया है अवमिश्रण द्वारा त्रुटि की मात्रा नहीं के बराबर होती है।

डेविड[5] ने परमाणविक अवशोषण द्वारा ताँबे तथा लोहे की मात्रा पादप भस्म में निकालते समय परिणामों को अल्प संवेदनशील तथा अल्प विश्वसनीय ठहराया था। उनके विचार से पादप भस्म में लोहे तथा ताँबे के विश्लेषण के लिए यह विधि सन्तोषजनक नहीं हैं, परन्तु हमारे प्रयोगानुसार इस विधि से निकाले गए परिणामों की संवेदनशीलता तथा विश्वसनीयता उत्तम प्रतीत हुई है।

विधि की पुनरुत्पादिता की जाँच करने के हेतु तीन न्यादर्श, जिनमें तावे की मात्राएं भिन्न भिन्न थीं, लिए गए तथा उनके प्रतिशत अवशोषण एवं ताँबे की मात्रा को दस दस बार निकाला गया। जैसा कि सारणी 5 में दर्शाया गया है प्रत्येक न्यादर्श की दसों मापों में कोई अंतर नही मिला है। इससे प्रत्यक्ष सिद्ध होता है कि इस विधि की पुनरुत्पादिता उत्तम है।

जिन तत्वों की स्पेक्ट्रल रेखायें विश्लेषात्मक रेखा के निकट पाई जाती हैं तथा जो अन्य तत्व ताँबे के अयस्कों में पाए जाते हैं उन समस्त तत्वों के व्यतिक्रमण प्रभाव का विस्तारपूर्वक अध्यन किया गया है। प्रेक्षण सारणी 2 में दिए गए हैं। यह देखा गया है कि यदि ताँबे तथा इन तत्वों की मात्रा का अनुपात 1:25 तक हो तो इनके उपस्थित होने से मापन पर इनका कोई प्रभाव नहीं पड़ता। ताँबे तथा अन्य तत्वों का यह अनुपात इस कारण चुना गया था कि सामान्यतः ताँबे के अयस्कों में इस अनुपात की मात्रा अर्थात् 1:25 से साधारणतया कभी अधिक नहीं पाई जाती है। परन्तु कुछ अन्य खनिज पदार्थों में जहाँ ताँबा केवल लघु तथा लेश मात्रा में ही पाया जाता है, यह अनुपात अधिक भी हो सकता है। इस कारण कुछ तत्व जो इन खनिज पदार्थों में ताँबे के साथ अधिक मात्रा में पाये जाते हैं व्यतिक्रमण का अध्ययन ताँबे तथा तत्व के 1:200 के अनुपात में किया गया है। ये तत्व सामान्यतः Fe, Al, Mg, Ca, Si तथा Na हैं। सारणी 6 में दिए गए परिणामों सिद्ध होता है कि इतने अधिक अनुपात पर भी इन समस्त तत्वों द्वारा व्यतिक्रम शून्य ही रहता है। इससे यह भली भाँति सिद्ध होता है कि यह विधि अयस्कों में ताँबे के विश्लेषणार्थ किसी भी अन्तरातात्विक व्यतिक्रमण से सर्वथा रहित है तथा इसकी पुनरुत्पादिता भी उत्तम है।

परीक्षात्मक अवस्थाओं को इस प्रकार प्रामाणिक तथा स्थिर किया गया है जिससे ताँबे के विश्लेषण में अधिकतम संवेदनशीलता तथा परिशुद्धता प्राप्त हो सके। प्रस्तावित विधि को राजस्थान से प्राप्त ताँबे के अयस्कों में प्रयुक्त किया गया। कार्यवाहक वक्र ताँबे के प्रभावों के 5 से 20 प्र०प्र० भा० के परिसर में

ताँबे की मात्रा तथा प्रतिशत अवशोषण में बनाया गया है तथा इसी की सहायता से न्यादर्शों में ताँबे की मात्रा निकाली गई है। परिणाम सारणी 3(अ) तथा 3 (ब) में दिए गए हैं।

निर्देश

1. वाल्श, ए० । **स्पेक्ट्रोकिम एक्टा,** 1955, **7,** 108.
2. रसेल, बी० जे०, शेल्टन, जे० पी० तथा वाल्श, ए० । **स्पेक्ट्रोकिम एक्टा** 1957, **8,** 317.
3. गिंज़बर्ग, वी० एल०, लिवशिट्स डी० एम० तथा सैटरीना, जी० आई० । **रशियन जनरल आफ एनेलेटिकल केमिस्ट्री** 1964, **19,** 1089.
4. मेन्जीज़, ए० सी० । **ऐनालि० केम०,** 1960, **32,** 898
5. डेविड, डी० जे० । **एनेलिस्ट,** 1958, **83,** 655.
6. अश्वथनारायन, आर० तथा विश्नोई, डी० एन० । **केमिकल एज आफ इण्डिया,** 1966, **32,** 532.
7. एम० आई० टी० । **वेवलेंग्थ टेबल्स ।**
8. सिंह, आई० पी० तथा विश्नोई, डी० एन० । **केमिकल एज आफ इण्डिया में प्रकाशनाधीन ।**
9. हिलीब्रांड, डब्ल्यू० एफ० तथा लन्डेल, जी० ई० एफ० । **अप्लाइड इनआरगैनिक एनेलिसिस,** 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 1, January, 1970, Pages 49-57

फास्फेट आयन प्रजाति की प्रकृति द्वारा मिट्टियों में फास्फोरस का अभिग्रहण एवं वितरण

शिवगोपाल मिश्र तथा बैजनाथ प्रसाद गुप्त
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—दिसम्बर 2, 1969]

सारांश

प्रस्तुत शोध-पत्र में काली, लाल तथा लैटेराइट तीन प्रकार की मिट्टियों का प्रयोग किया गया है। प्रत्येक मिट्टी के साथ पाइरोफास्फेट आयन द्वारा फास्फेट अभिग्रहण क्षमता (PRC) आर्थोफास्फेट की अपेक्षा अधिक पाई गई। इसी प्रकार का परीणाम इन आयनों द्वारा ग्रहीत फास्फोरस के वितरण पर भी पाया गया। इन दोनों प्रकार के फास्फेटों के साथ लाल तथा लैटेराइट मिट्टियों में क्रमशः निम्न परिणाम प्राप्त हुए हैं—

(i) Fe-P > Al-P > Ca-P (लाल मिट्टी के साथ)
(ii) Fe-P > Al-P > Ca-P (लैटेराइट मिट्टी के साथ)

किन्तु काली मिट्टी के साथ KH_2PO_4 तथा $K_4P_2O_7$ फास्फेट द्वारा क्रमशः निम्न प्रकार के परिणाम प्राप्त हुये—

(i) Al-P > Ca-P > Fe-P
(ii) Ca-P > Al-P > Fe-P

Abstract

Retention and distribution of P in soils as affected by nature of phosphate ion species. *By* S. G. Misra and B. P. Gupta, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry University of Allahabad.

Three types of soils namely black, red and laterite have been used in the prcsent study. The phosphate retention capacity of the pyrophosphate ion species was found greater than orthophosphate ion species in each soil type used. A similar trend was also found on the distribution of retained P as affected by two different phosphate ion species. The results obtained from two of the soil types, namely red and laterite soils with both phosphate ion species respectively are as follows :

सारणी 1

मिट्टियाँ	रासायनिक संघटन				मिट्टियों में मल अकार्बनिक फास्फोरस (ppm.)			
	पी-एच	% R_2O_3	% CaCO	% कार्बन	Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-P
लाल मिट्टियाँ								
1. मिर्जापुर	6·4	5·3	0·87	0·76	2·0	5·0	17·0	15·0
2. सुक्रीत	7·7	10·0	1·25	0·90	2·0	5·0	17·5	6·0
3. रीवाँ	6·8	10·28	0·50	0·33	2·0	6·5	18·5	8·5
4. पन्ना	6·4	9·6	0·20	0·51	3·0	6·5	17·0	7·5
5. छतरपुर	6·8	6·9	0·30	0·27	2·0	12·0	17·0	17·0
काली मिट्टियाँ								
6. बलिया	8·0	16·72	1·75	0·52	0·5	8·5	35·5	50·0
7. गयपुरा	7·4	21·88	2·50	0·45	2·5	8·5	25·0	57·0
8. बिरहा	7·4	17·99	1·25	0·21	1·0	1·5	29·5	48·0
9. रीवाँ	8·2	10·76	3·00	0·28	0·5	3·5	17·0	80·0
10. सतना	7·2	13·00	1·50	0·70	1·5	2·5	15·5	52·0
लैटेराइट मिट्टी								
11. भुवनेश्वर	6·0	...	Nil	0·28	9·7	11·5	31·0	7·0

(i) Fe-P > Al-P > Ca-P in Red soils.
(ii) Fe-P > Al-P > Ca-P in Laterite soil.

However, the results obtained from Black soils with different phosphate ion species are as follows :—

(i) Al-P > Ca-P > Fe-P (with KH_2PO_4)
(ii) Ca-P > Al-P > Fe-P (with $K_4P_2O_7$)

ऐसा देखा गया है कि मिट्टियों में डाले गये फास्फोरस उर्वरक से पौधे फास्फोरस के अल्पांश का ही उपयोग कर पाते हैं। उसका अधिकांश मिट्टी द्वारा अभिग्रहीत हो जाता है। यह 'फास्फोरस' 'अभिग्रहण कहलाता है।

यह सर्वमान्य है कि कम पी-एच पर फास्फोरस मुख्य रूप से R_2O_3 के कारण अभिग्रहीत होता है। अधिक पी०एच में P मुख्य रूप से Ca-P के संयोग में अभिग्रहीत हो जाता है। पटेल तथा विश्वनाथ[1] ने फास्फोरस अभिग्रहण का अध्ययन करते हुये इस बात की पुष्टि की कि काली मिट्टी में पी० एच 7·0 के आसपास फास्फोरस का अधिक मात्रा में यौगिकीकरण होता है।

फास्फेट उर्ववरकों के बढ़ते हुये उपयोग को दृष्टि में रखते हुये यह सोचा गया कि यदि आर्थो तथा पाइरोफास्फेट—इन दो प्रजातियों को प्रयुक्त करके विभिन्न मिट्टियों के साथ अध्ययन किया जाये तो उससे भविष्य में नवीन फास्फोरस उर्वरक के प्रयुक्त किये जाने की सम्भावना पर प्रकाश पड़ सकता है। एतदर्थ प्रस्तुत अध्ययन किया गया क्योंकि अभी तक फास्फेट आयन की प्रजाति सम्बन्धी अध्ययन नहीं हुये हैं।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये लाल, काली तथा लैटेराइट मिट्टियों को चुना गया। इनके सतही नमूने एकत्र किये गये। लाल मिट्टी के नमूने मिर्जापुर, सुक्रीत, रीवाँ, पन्ना, छतरपुर जनपदों से, काली मिट्टी के नमूने बलिया, गयपुरा, बिरहा, रीवाँ तथा सतना जनपदों से तथा लैटेराइट मिट्टी का एकमात्र सतही नमूना भुवनेश्वर (उड़ीसा) से प्राप्त किया गया। प्रस्तुत अध्ययन में फास्फेटीय यौगिकों को आर्थो ($H_2PO_4^-$) तथा पाइरोफास्फेट ($P_2O_7^{-4}$) आयनों के रूप में प्रयुक्त किया गया हैं। इन मिट्टियों का रासायनिक विश्लेषण जैक्सन[2] द्वारा दी गई विधि से किया गया (देखें सारणी 1)। मिट्टियों के मूल अकार्बनिक फास्फोरस (Native P) तथा अभिग्रहीत फास्फोरस का भी विश्लेषण जैक्सन विधि द्वारा किया गया है (देखें सारणी 1,2,3,4,5 तथा 6)। इन मिट्टियों के निष्कर्ष में फास्फेट का निर्धारण रङ्गमापी विधि द्वारा सल्फोमालिबिडिक अम्ल तथा क्लोरोस्टैनस अभिकर्मकों की सहायता से जैक्सन विधि द्वारा किया गया।

डाले गए फास्फोरस का अभिग्रहण

फास्फेट अभिग्रहण (retention) ज्ञात करने के लिये KH_2PO_4 तथा $K_4P_2O_7$ के 50 ppm P विलयन तैयार किये गये। 1 ग्राम मिट्टी के साथ 5 मिली० विलयन को बीकर में डाला गया। 1 घन्टे

सारणी 2

मिट्टियों द्वारा अभिग्रहीत P का अकार्बनिक रूपों में वितरण (KH_2PO_4 प्रयोग करने पर)

मिट्टियाँ	अभिग्रहीत P (ppm.)	अभिग्रहीत P का वितरण (ppm)				प्रतिशत अभिग्रहीत P	अभिग्रहीत P का वितरण %				उपलब्ध प्रतिशत	अनुपलब्ध प्रतिशत
		Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-P		Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-P		
लाल मिट्टी												
1. मिर्जापुर	107·0	9·5	20·5	63·2	10·2	42·8	8·83	19·0	58·7	9·4	96·7	3·3
2. सुकीत	140·0	15·2	26·5	77·5	17·5	56·0	10·8	19·8	55·0	12·4	97·7	2·3
3. रीवाँ	145·0	22·0	27·5	68·8	24·5	58·0	14·9	18·7	46·7	16·6	96·5	3·5
4. पन्ना	110·0	15·0	23·2	53·5	15·5	44·0	13·5	20·8	48·1	13·9	97·5	2·5
5. छतरपुर	63·0	10·0	19·5	22·0	11·0	25·2	16·0	31·2	35·2	17·6	99·3	0·7
					औसत प्रतिशत	45·2	12·8	21·9	48·7	14·0	97·5	2·5

सारणी 3

मिट्टियों द्वारा अभिग्रहीत P का अकार्बनिक रूपों में वितरण ($K_4P_2O_7$ प्रयोग करने पर)

मिट्टियाँ	अभिग्रहीत P (ppm)	अभिग्रहीत P का वितरण (ppm)				प्रतिशत अभग्रहीत P	अभिग्रहीत P का वितरण %				उपलब्ध प्रतिशत	अनुपलब्ध प्रतिशत
		Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-P		Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-P		
लाल मिट्टी												
1. मिर्जापुर	174·0	5·0	45·5	112·5	9·0	69·6	2·85	25·9	64·1	5·1	98·8	1·2
2. सुक्रीत	160·0	3·0	50·0	99·5	4·5	64·0	1·8	31·0	61·6	2·7	98·1	1·9
3. रीवाँ	172·0	5·5	46·5	110·5	7·0	68·8	3·1	26·9	64·0	4·0	98·6	1·4
4. पन्ना	185·0	12·5	49·5	108·0	15·0	64·0	6·7	26·7	58·3	8·1	100·0	0·0
5. छतरपुर	130·0	13·5	46·5	50·0	15·5	52·0	10·2	35·3	38·3	11·8	97·0	3·0
					औसत प्रतिशत	63·6	4·9	29·1	57·2	6·3	98·5	1·5

सारणी 4

मिट्टियों द्वारा अभिग्रहीत P का अकार्बनिक रूपों में वितरण (KH_2PO_4 प्रयोग करने पर)

मिट्टियाँ	अभिग्रहीत P (ppm)	अभिग्रहीत P का वितरण (ppm)				प्रतिशत अभिग्रहीत P	अभिग्रहीत P का वितरण (%)				उपलब्ध P%	अनुपलब्ध P%
		Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-P		Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-P		
काली मिट्टी												
6. बलिया	177·0	15·0	68·5	40·0	52·51	70·8	8·4	38·3	22·4	29·4	99·4	0·6
7. गयपुरा	170·0	20·0	69·7	30·5	47·0	68·0	11.6	40·4	17·6	27·06	98·3	1·7
8. बिरहा	172·0	15·5	69·8	34·5	50·0	68·8	9·01	40·5	20·0	29·0	98·7	1·2
9. रीवाँ	202·0	13·5	90·8	20·0	75·0	80·8	6·01	44·4	9 8	36·7	98·6	1·3
10 सतना	170·0	14·2	74·5	33·0	45·0	63·0	8·23	43·2	19·1	26·1	98·7	1·2
					औसत प्रतिशत	71·2	8·7	41·3	17·7	29·6	98·7	1·3

सारणी 5

मिट्टियों द्वारा अभिग्रहीत P का अकार्बनिक रूपों में वितरण ($K_4P_2O_7$ प्रयोग करने पर)

मिट्टियाँ	अभिग्रहीत (ppm)	अभिग्रहीत P का वितरण (ppm)				प्रतिशत अभिग्रहीत P	अभिग्रहीत P का वितरण (%)				उपलब्ध P %	अनुपलब्ध P %
		Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-P		Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-		
काली मिट्टी												
6. बलिया	211·0	3·5	59·5	39·5	90·5	84·4	1·6	27·9	18·5	42·5	91·5	8·5
7. गयपुरा	204·6	7·5	57·5	44·0	85·0	81·6	3·6	28·1	21·5	41·6	95·1	4·9
8. बिरहा	198·0	12·0	46·5	37·5	69·0	79·2	6·0	23·2	18·7	34·5	83·4	16·6
9. रीवाँ	205·0	17·0	41·0	20·0	105·0	82·0	8·1	19·6	9·6	50·4	89·3	10·7
10. सतना	213·0	11·5	51·5	43·5	80·0	85·2	5·2	23·6	20·0	36·8	87·6	12·4
					औसत प्रतिशत	82·7	4·9	24·5	17·6	41·1	89·4	10·5

सारणी 6

मिट्टियों द्वारा अभिग्रहीत P का वितरण

लैटेराइट मिट्टी भुवनेश्वर (उड़ीसा	अभिग्रहीत P (ppm)	अभिग्रहीत P का वितरण (ppm) Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-P	प्रतिशत अभिग्रहीत P
(KH_2PO_4 प्रयोग करने पर)	105·0	9·0	30·0	50·0	10·5	42·0
($K_4P_2O_7$ प्रयोग करने पर)	142·0	8·8	54·5	68·8	7·0	56 8

	अभिग्रहीत P का वितरण प्रतिशत Ad-P	Al-P	Fe-P	Ca-P	उपलब्ध प्रतिशत	अनुपलब्ध प्रतिशत
(KH_2PO_7 प्रयोग करने पर)	8·5	28·5	47·5	9·9	95·3	4·7
($K_4P_2O_7$ प्रयोग करने पर)	6·1	33·1	47·9	4·9	97·8	2·2

नोट :—मिट्टी के मूल P को प्रत्येक दशा में घटा दिया गया है

तक हिलाकर लगभग 18 घन्टे तक रहने दिया गया। इसके पश्चात् फास्फेट युक्त मिट्टी को बुकनर कीप की सहायता से पृथक किया गया। प्रत्येक बार मिट्टी को 5 मिली० आसुत जल से धोया गया। फिर इसी मिट्टी को उसी बीकर में करके उसमें Ad-P, Al-P, Fe-P तथा Ca-P का निश्चयन चैंग तथा जैक्सन विधि[3] द्वारा किया गया।

विवेचना

प्राप्त परिणामों के आधार पर यह पता चलता है कि फास्फेट अभिग्रहण पर जिन मुख्य कारकों का प्रभाव पड़ता है उन्हें निम्न शीर्षकों के अन्तर्गत रख सकते हैं—

(क) मिट्टियों के P अभिग्रहण पर फास्फेट आयन का प्रभाव

प्राप्त परिणामों से ज्ञात होता है कि प्रत्येक मिट्टी में फास्फेट अभिग्रहण पाइरोफास्फेट की उपस्थिति में आर्थोफास्फेट की अपेक्षा अधिक होता है। फास्फेट अभिग्रहण (प्रतिशत औसत) के अनुसार इन मिट्टियों को निम्न प्रकार से क्रमबद्ध किया जा सकता है—

पाइरोफास्फेट की उपस्थिति में:—

काली मिट्टी (82·7%) > लाल मिट्टी (63·6%) > लैटेराइट मिट्टी (56·8%)

आर्थोफास्फेट की उपस्थिति में :—

काली मिट्टी (71·2%) > लाल मिट्टी (45·2%) > लैटेराइट मिट्टी (42·0%)

(ख) फास्फेट आयनों का विभिन्न अकार्बनिक रूपों पर प्रभाव

फास्फेट आयन की दोनों प्रजातियों की उपस्थिति में अभिग्रहीत P के प्रभाजन के फलस्वरूप प्राप्त परिणाम इस प्रकार हैं :—

पाइरोफास्फेट के साथ :—

(i) Ca-P > Al-P > Fe-P — काली मिट्टी में (देखें सारणी 5)

(ii) Fe-P > Al-P > Ca-P — लाल मिट्टी में (देखें सारणी 3)

(iii) Fe-P > Al-P > Ca-P — लैटेराइट मिट्टी में (देखें सारणी 6)

आर्थोफास्फेट के साथ :—

(i) Al-P > Ca-P > Fe-P — काली मिट्टी में (देखें सारणी 4)

(ii) Fe-P > Al-P > Ca-P — लाल मिट्टी में (देखें सारणी 2)

(iii) Fe-P > Al-P > Ca-P — लैटेराइट मिट्टी में (देखें सारणी 6)

प्राप्त परिणामों से ज्ञात होता है कि जब मिट्टियों में पाइरोफास्फेट डाला जाता है तो जल-अपघटन होने से यह आर्थोफास्फेट में परिवर्तित हो जाता है और आर्थोफास्फेट की भाँति कार्य करने लगता है। चूँकि आर्थो तथा पाइरोफास्फेटों के डालने के पश्चात् अभिग्रहीत P का निष्कर्षण एक-जैसा होता है अतः यह निश्चय है कि $H_2PO_4^-$ तथा $P_2O_7^{-4}$ आयनों का अभिग्रहण एक ही क्रिया के फलस्वरूप होता होगा।

लाल मिट्टी में मूल अकार्बनिक फास्फोरस इस क्रम में पाया गया—

Fe-P > Ca-P > Al-P > Ad-P

किन्तु KH_2PO_4 तथा $K_4P_2O_7$ डालने के फलस्वरूप Al-P तथा Ca-P प्रभाज बायें हटकर क्रमशः द्वितीय तथा तृतीय स्थानों पर चले गये जबकि Fe-P की स्थिति पर कोई प्रभाव नहीं पड़ा—इसका एकमात्र कारण R_2O_3 में से Fe_2O_3 की अधिकता हो सकती है। काली मिट्टी में उपस्थित मूल अकार्बनिक फास्फोरस के निश्चयन के फलस्वरूप प्राप्त परिणाम इस प्रकार हैं :—

Ca-P > Fe-P > Al-P > Ad-P

जब KH_2PO_4 डाला जाता है तो अधिकांश फास्फेट ऐल्युमिनियम के साथ संयोग करता है—शेष क्रमशः कैल्सियम तथा लोह के साथ संयोग करता है (Al-P>Ca-P>Fe-P) किन्तु पाइरोफास्फेट के साथ कैल्सियम फास्फेट की मात्रा सबसे अधिक होती है तथा लौह की सबसे कम (Ca-P>Al-P>F-eP)।

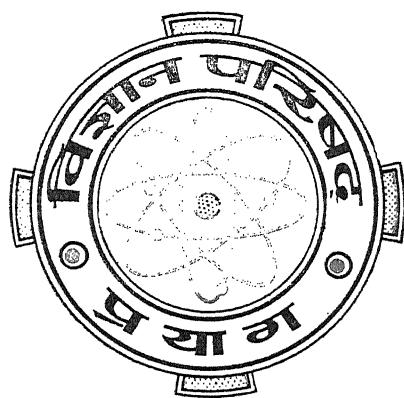
तुलनात्मक दृष्टि से लाल मिट्टी की अपेक्षा लैटेराइट मिट्टी में मूल अकार्बनिक फास्फोरस की मात्रा भिन्न है (Fe-P > Al-P > Ad-P > Ca-P)। परन्तु KH_2PO_4 तथा $K_4P_2O_7$ के साथ वे ही परिणाम प्राप्त होते हैं जो लाल मिट्टी के साथ।

उपर्युक्त मिट्टियों के साथ फास्फेटी पदार्थों में से P अभिग्रहण सम्बन्धी जो परिणाम प्राप्त हुये हैं उनके आधार पर निश्चित रूप से ज्ञात होता है कि सभी मिट्टियों के साथ Al-P की मात्रा

सदैव बढ़ी है परन्तु पाइरोफास्फेट के साथ काली मिट्टी में अधिकांश फास्फेट Ca-P रूप में बदल जाता है।

इससे यह पता चलता है कि यदि काली मिट्टी में पाइरोफास्फेट उर्वरक का प्रयोग किया जाय तो पौधों को फास्फेट उपलब्धि आर्थोफास्फेट उर्वरक की अपेक्षा अधिक होगी। इस दिशा आगे भी कार्य हो रहा है।

निर्देश

1. पटेल एस० के० तथा विश्वनाथ बी०। **इण्डियन जर्न० एग्री० साइंस,** 1946, **16,** 428.
2. जैक्सन एम० एल०। **स्वायल केमिकल एनैलिसिस, एशिया पब्लिशिंग हाउस,** 1962.
3. चैंग, एस० सी० तथा चू, डब्लू० के०। **स्वायल साइंस,** 1962, **12,** 286-93.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 13 | अप्रैल 1970 | संख्या 2

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 2, April 1970, Pages 57-66

H-फलनों की कुछ अनन्त श्रेणियाँ-II

पी० आनन्दानी
गणित विभाग, होल्कर साइंस कालेज, इन्दौर

[प्राप्त–नवम्बर 6, 1967]

सारांश

इस शोधपत्र में H-फलनों की कई अनन्त श्रेणियाँ संकलित की गई हैं जिनमें H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप में व्यक्त किया गया है, फिर समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर स्थानान्तरित करते हुये विभिन्न ज्ञात सम्बन्धों के प्रयोग द्वारा आन्तरिक हाइपरज्यामितीय फलन को संकलित किया गया है।

Abstract

Some infinite series of H-functions II. *By* P. Anandani, Department of Mathematics, Holkar Science College, Indore.

In this paper we have summed a number of infinite series of H-functions by expressing the H-function as Mellin-Barnes type integral, then interchanging the order of integration and summation, and summing the inner hypergeometric function by using the various known relations.

1. भूमिका: फाक्स [7. p. 408] ने H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप में प्रचलित किया जिसे गुप्ता तथा जैन[8] ने सांकेतिक रूप में

$$H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\\{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)}\,x^s\,ds \qquad (1\cdot 1)$$

द्वारा व्यक्त किया है जहाँ $\{(f_r,\gamma_r)\}$ प्राचलों के समुच्चय $(f_1,\gamma_1),\cdots,(f_r,\gamma_r)$ के लिये आया है, x शून्य के तुल्य नहीं है तथा शून्य गुणनफल को इकाई के माना जाता है; p, q, m तथा n ऐसी पूर्ण संख्यायें हैं जो $1\leqslant m\leqslant q$; $0\leqslant n\leqslant p$ की तुष्टि करती हैं; $\alpha_j(j=1, 2, \ldots, p)$, $\beta_j(j=1, 2, \ldots, q)$ धनात्मक संख्याएँ हैं तथा $a_j(j=1, 2, \ldots, p)$, $b_j(j=1, 2, \ldots, p)$ ऐसी संकीर्ण संख्यायें हैं कि $\Gamma(b_h-\beta_h s)$

$(h=1, 2, \ldots, m)$ का एक भी पोल $\Gamma(1-a_i+\alpha_i s)(i=1, 2, \ldots, n)$ के पोल से संगमित नहीं होता

$$a_i(b_h+\nu)\neq\beta_h(a_i-\eta-1) \tag{1·2}$$

$$(\nu, \eta=0, 1, \ldots ; \quad h=1, 2, \ldots, m; \quad i=1, 2, \ldots, n)$$

साथ ही हम कल्पना करेंगे कि [4, p. 240]

$$\mu=\sum_1^q (\beta_j)-\sum_1^p (\alpha_j)\geqslant 0 \tag{1·3}$$

तथा

$$0<|x|<\prod_{j=1}^p \alpha_j^{-\alpha_j}\prod_{j=1}^q \beta_j^{\beta_j} \quad \text{यदि } \mu=0 \tag{1·4}$$

सम्बन्ध सही है। T संकीर्ण S-तल पर ऐसा कन्टूर है कि बिन्दु $s=(b_j+\nu)/\beta_j(j=1, \ldots, m;\ \gamma=0, 1, \ldots)$ $s=(a_j-1-\nu)/\alpha_j\ (j=1, \ldots, n;\ \gamma=0, 1, \ldots)$ दाहिनी ओर स्थित हैं और T के बाईं ओर हैं जबकि और आगे T, $s=\infty-ik$. से $s=\infty+ik$. तक जाता है। यहाँ पर k अचर है जिससे कि $k>|Im\ b_j|/\beta_j(j=1, \ldots, m)$ । (1·2) के कारण कन्टूर T के प्रतिबन्धों की परिपूर्ति होती है।

[4, p. 279 (6·5)] से हमें

$$H_{p,\ q}^{m,\ n}\left[x\,\middle|\begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right]=0(|x|^{\psi}) \quad \text{यदि } x \text{ छोटा हो} \tag{1·5}$$

प्राप्त होता है। जहाँ

$$\sum_1^q (\beta_j)-\sum_1^p (\alpha_j)\geqslant 0, \text{ तथा } \psi=R_e\left(\frac{b_h}{\beta_h}\right)(h=1, 2, \ldots, m)$$

[4, p. 246(2·16)], से हमें

$$H_{p,\ q}^{m,\ n}\left[x\,\middle|\begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right]=0(|x|^{\delta}) \quad \text{यदि } x \text{ बड़ा हो} \tag{1·6}$$

प्राप्त होता है

जहाँ
$$\sum_1^q (\beta_j)-\sum_1^p (\alpha_j)>0,\ \sum_1^n (\alpha_j)-\sum_{n+1}^p (\alpha_j)+\sum_1^m (\beta_j)-\sum_{m+1}^q (\beta_j)\equiv\phi>0,$$

$$|\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi \text{ तथा } \delta=R_e\left(\frac{a_i-1}{\alpha_i}\right)(i=1, 2, \ldots, n).$$

गामा फलन के लिये गुणन सूत्र [1, p. 4(11)]

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2-1/2m}\, m^{mz-1/2}\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{i}{m}\right) \text{ है} \tag{1·7}$$

जहाँ m धनात्मक पूर्णांक है। यदि r धनात्मक पूर्णसंख्या हो तो इससे हमें

$$\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{a+r+i}{m}\right)=m^{-r}(a)_r \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{a+i}{m}\right) \tag{1·8}$$

$$\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{a+r-i}{m}\right)=m^{-r}(a-m+1)_r \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{a-i}{m}\right) \tag{1·9}$$

तथा

$$\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{a-r+i}{m}\right)=\frac{(-m)^r}{(1-a)_r} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{a+i}{m}\right) \tag{1·10}$$

प्राप्त होंगे जहाँ $(a)_r$ फैक्टोरियल फलन है

$$(a)_r=a(a+1)(a+2)\ldots(a+r-1).$$

2. आगे हम $(\triangle(\lambda, a), h)$ संकेत द्वारा प्राचलों के समुच्चय $\left(\frac{a}{\lambda}, h\right), \left(\frac{a+1}{\lambda}, h\right), \ldots, \left(\frac{a+\lambda-1}{\lambda}, h\right)$, को व्यक्त करेंगे। प्राचलों की संख्या अधिक होने के कारण संकेत $\left(\triangle\left(\lambda, a+\begin{vmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{vmatrix}\right), h\right)$ के द्वारा प्राचलों के समुच्चय $(\triangle(r, a+r_1), h), \ldots, (\triangle(\lambda, a+r_n), h)$ को अंकित किया जावेगा।

(i) **प्रथम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-h)^r}{r!} H_{p,\, q+\lambda}^{l+\lambda,\, u}\left[x \left| \begin{matrix} \{(a_p, \alpha_p)\} \\ (\triangle(\lambda, b+r), a), \{(b_q, \beta_q)\} \end{matrix} \right.\right]$$

$$=\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)^{-b} H_{p,\, q+\lambda}^{l+\lambda,\, u}\left[\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)^{a\lambda} x \left| \begin{matrix} \{(a_p, \alpha_p)\} \\ (\triangle(\lambda, b), a), \{(b_q, \beta_q)\} \end{matrix} \right.\right] \tag{2·1}$$

जिसमें λ तथा r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं, $\left|\frac{h}{\lambda}\right|<1,\ a>0,$

$$\sum_{1}^{u}(\alpha_j)-\sum_{u+1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{1}^{l}(\beta_j)-\sum_{l+1}^{q}(\beta_j)+a\lambda\equiv\phi>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi.$$

उपपत्ति

बाईं ओर के H-फलन को मेलिन-बार्नीज़ प्रकार के समाकल (1·1) के रूप में व्यक्त करने पर समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलने पर तथा (1·8) का उपयोग करने पर, यह श्रेणी

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{b+i}{\lambda}-as\right)x^s}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)}\ {}_1F_0\left[b-\lambda as\,;\,;-\frac{h}{\lambda}\right] ds$$

में परिणत हो जाती है। किन्तु

$$ {}_1F_0\left[b-\lambda as\,;\,;-\frac{h}{\lambda}\right]=\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)^{\lambda as-b} $$

अतः (1·1) का उपयोग करने पर H- फलन की परिभाषा प्राप्त होती है जो अभीष्ट है।

(ii) **द्वितीय संकलन**

उपर्युक्त विधि से आगे बढ़ने पर तथा (1·8) के बजाय (1·9) का उपयोग करने पर, संकलन

$$ \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-h)^r}{r\,!}H_{p+\lambda,\,q}^{l,\,u+\lambda}\left[x\left|\begin{matrix}(\triangle(\lambda,\,c-r),\,a),\,\{(a_p,a_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] $$

$$ =\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)^{c-1}H_{p+\lambda,\,q}^{l,\,u+\lambda}\left[\frac{x}{\left(1+\frac{h}{\lambda}\right)^{\lambda a}}\left|\begin{matrix}(\triangle(\lambda,\,c),\,a),\,\{(a_p,\,a_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \qquad (2{\cdot}2) $$

की स्थापना सरलता से हो सकती है यदि λ तथा r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हों,

$$ \left|\frac{h}{\lambda}\right|<1,\ a>0,\ \sum_{1}^{u}(a_j)-\sum_{u+1}^{p}(a_j)+\sum_{1}^{l}(\beta_j)-\sum_{l+1}^{q}(\beta_j)+a\lambda\equiv\phi>0,\ \ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi. $$

(iii) **तृतीय संकलन**

$$ \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2r}}{r\,!\,\Gamma(a+r)}H_{p+2\lambda,\,q}^{l,\,u+2\lambda}\left[x\left|\begin{matrix}(\triangle(\lambda,\,\rho-r),\,h),\,(\triangle(\lambda,\,\sigma-r),\,h),\,\{(a_p,\,a_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] $$

$$ =\frac{2^{a+\rho+\sigma-3\lambda-a+1/2}}{\sqrt{(\pi)}}\,H_{p+4\lambda,\,q+2\lambda}^{l+2\lambda,\,u+2\lambda} $$

$$ \left[\left(\frac{x}{2^{2\lambda h}}\right)\left|\begin{matrix}(\triangle(\lambda,\,\rho),\,h),\,(\triangle(\lambda,\,\sigma),\,h),\,\{a_p,\,a_p)\},(\triangle(\lambda,\,a-1+\left|\frac{\rho}{\sigma}\right|),\,h)\\ (\triangle(2\lambda,\,a+\rho+\sigma-2),h,\,\{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \qquad (2{\cdot}3) $$

जहाँ λ, r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं, $R_e(a+\rho+\sigma)>2,\ h>0,$

$$ \sum_{1}^{u}(a_j)-\sum_{u+1}^{p}(a_j)+\sum_{1}^{l}(\beta_j)-\sum_{l+1}^{q}(\beta_j)+2\lambda h\equiv\phi>0,\ \ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi. $$

उपपत्ति

(1·1) में से बाईं ओर प्रतिस्थापित करने पर, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर तथा (1·9) का उपयोग करने पर हमें

$$ \frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\prod_{j=1}\Gamma(b_j-\beta_js)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+a_js)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(1-\frac{\rho+i}{\lambda}+hs\right)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(1-\frac{\sigma+i}{\lambda}+hs\right)}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_js)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-a_js)\Gamma(a)}\,x^s I\,ds $$

प्राप्त होगा जहाँ

$$I={}_2F_1\left[\begin{matrix}1-\rho+h\lambda s, & 1-\sigma+h\lambda s; 1\\ \alpha;\end{matrix}\right]$$

गास-प्रमेय [9, p. 144], (1·7) तथा (1·1) को व्यवहृत करने पर परिणाम की प्राप्ति होगी।

(iv) **चतुर्थ संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!}H^{l,u}_{p+2\lambda,q}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}, & (\triangle(\lambda,1-\beta+\left|\begin{matrix}\alpha+r\\-r\end{matrix}\right|),h)\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+1)\,\lambda^{1/2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}H^{l,u}_{p+2\lambda,q}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\},(\triangle(\lambda,1-\beta),h),(\triangle(\lambda,\frac{1}{2}\alpha-\beta+1),h)\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

यदि λ, r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हों, $h>0$, $R_e(\beta)<1$, (2·4)

$$\sum_1^u(\alpha_j)-\sum_{u+1}^p(\alpha_j)+\sum_1^l(\beta_j)-\sum_{l+1}^q(\beta_j)-2\lambda h\equiv\phi>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi.$$

उपपत्ति

पहले की भाँति आगे बढ़ने पर तथा (1·8) तथा (1·10) का उपयोग करने पर हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)\,x^s}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\alpha-\beta+1+i}{\lambda}-hs\right)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{1-\beta+i}{\lambda}-hs\right)}$$

$$\times 2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\beta+\lambda hs; -1\\ \alpha-\beta+1-\lambda hs\end{matrix}\right]ds$$

प्राप्त होगा और कुमार-प्रमेय[9, p. 362] (1·7) तथा (1·1), के उपयोग से वांच्छित परिणाम प्राप्त होगा।

(v) **पंचम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(k)_r}{r!}H^{l,u+2\lambda}_{p+4\lambda,q}\left[x\left|\begin{matrix}(\triangle(\lambda,-k-r+\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right|),h),\{(a_p,\alpha_p)\},(\triangle(\lambda,r+\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right|),h)\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)}{\Gamma(k+1)}(\tfrac{1}{2}\lambda)^{1/2k}H^{l+2\lambda,u+2\lambda}_{p+6\lambda,q+2\lambda} \quad (2·5)$$

$$\left[x\left|\begin{matrix}(\triangle(\lambda,-k+\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right|),h)\{(a_p,\alpha_p)\},(\triangle(\lambda,-\frac{1}{2}k+\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right|),h),(\triangle(2\lambda,\alpha+\beta-k-1),h)\\ (\triangle(2\lambda,\alpha+\beta-\frac{3}{2}k-1),h),\{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

यदि λ, r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हों, $R_e(2\alpha+2\beta-3k)>2$, $h>0$,

$$\sum_1^u(\alpha_j)-\sum_{u+1}^p(\alpha_j)+\sum_1^l(\beta_j)-\sum_{l+1}^q(\beta_j)\equiv\phi>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi.$$

उपपत्ति

बाईं ओर के H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल (1·1) के रूप में अभिव्यक्त करने पर, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर, (1·8) तथा (1·9) का उपयोग करने पर श्रेणी का परिवर्तित स्वरूप

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(1-\frac{\alpha-k+i}{\lambda}+hs\right)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(1-\frac{\beta-k+i}{\lambda}+hs\right)}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\alpha+i}{\lambda}-hs\right)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\beta+i}{\lambda}-hs\right)}\, x^s I\, ds$$

हो जावेगा जहाँ

$$I={}_3F_2\left[\begin{matrix}k,\ k-\alpha+1+\lambda hs,\ k-\beta+1+\lambda hs;\ 1\\ \alpha-\lambda hs,\ \beta-\lambda hs\end{matrix}\right]$$

और डिक्सन प्रमेय [9, p. 362], (1·7) तथा (1·1) के उपयोग से वांछित फल की प्राप्ति होगी।

(vi) **षष्टम संकलन**

(2·5) की भाँति अग्रसर होने पर निम्नांकित को विकसित किया जा सकता है

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(k)_r}{r!}H_{p+2\lambda,\ q+2\lambda}^{l+\lambda,\ u+\lambda}\left[x\left|\begin{matrix}(\triangle(\lambda,\ \alpha-k-r),\ h),\ \{(a_p,\ \alpha_p)\},\ (\triangle(\lambda,\ \alpha+r),\ h)\}\\ (\triangle(\lambda,\ \beta+k+r),\ h),\ \{(b_q,\ \beta_q)\},\ (\triangle(\lambda,\ \beta-r),\ h)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\lambda^k\Gamma(\frac{1}{2}k+1)\Gamma(\alpha-\beta-\frac{3}{2}k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-\beta-k)}H_{p+2\lambda,\ q+2\lambda}^{l+\lambda,\ u+\lambda}\left[x\left|\begin{matrix}(\triangle(\lambda,\ \alpha-k)h,\ \{(a_p,\ \alpha_p)\},(\triangle(\lambda,\ \alpha-\frac{1}{2}k),h)\\ (\triangle(\lambda,\ \beta+k),\ h),\ \{(b_q,\ \beta_q)\},(\triangle(\lambda,\ \beta+\frac{1}{2}k),h)\end{matrix}\right.\right] \qquad (2\cdot6)$$

जहाँ λ, r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं $R_e(2\alpha-2\beta-3k)>0$, $h>0$,

$$\sum_{1}^{u}(\alpha_j)-\sum_{u+1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{1}^{l}(\beta_j)-\sum_{l+1}^{q}(\beta_j)\equiv\phi>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi.$$

(vii) **सप्तम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\alpha)_r(2\beta)_r}{r!\,2^r(\alpha+\beta+\frac{1}{2})_r}H_{p+2\lambda,\ q+\lambda}^{l+\lambda,\ u}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\ \alpha_p)\},\ (\triangle(2\lambda,\ 2\gamma+r),\ h)\\ (\triangle(\lambda,\ \gamma+r),\ h),\ \{(b_q,\ \beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})(\beta+\frac{1}{2})}H_{p+4\lambda,\ q+3\lambda}^{l+3\lambda,\ v}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\ \alpha_p)\}(\triangle(2\lambda,\ 2\gamma),\ h),(\triangle(\lambda,\ \gamma+\frac{1}{2}-\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right|),\ h)\\ (\triangle(\lambda,\ \gamma),(\triangle(\lambda,\ \gamma+\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\alpha-\beta\end{matrix}\right|),\ h),\ \{b_q,\ \beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \qquad (2\cdot7)$$

यदि λ, r धनात्मक संख्यायें हैं, $h>0$, $Re(\gamma-\alpha-\beta)>-\frac{1}{2}$,

$$\sum_{1}^{u}(\alpha_j)-\sum_{u+1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{1}^{l}(\beta_j)-\sum_{l+1}^{q}(\beta_j)-\lambda h\equiv\phi>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi.$$

उपपत्ति

(1·1) में से (2·7) में बाँईं ओर प्रतिस्थापित करने पर, समाकलन तथा संकलन का क्रम परिवर्तित करने पर (1·8) उपयोग करने पर श्रेणी का स्वरूप

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+i}{\lambda}-hs\right)x^s}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)\prod_{i=0}^{2\lambda-1}\Gamma\left(\frac{2\gamma+i}{2\lambda}-hs\right)} \times {}_3F_2\left[\begin{matrix}2\alpha, 2\beta, \gamma-\lambda hs; 1\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}, 2\gamma-2\lambda hs\end{matrix}\right] ds$$

होगा और व्हिपल प्रमेय [9, p. 366], (1·7) तथा (1·1), के उपयोग से वांछित फल की प्राप्ति होगी।

(viii) **अष्टम संकलन**

(2.7) की भाँति अग्रसर होने पर, संकलन

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{r!\,(\alpha+\beta+\frac{1}{2})_r}H^{l+\lambda,\,u}_{p+\lambda,\,q+\lambda}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}, (\triangle(\lambda,\gamma+\frac{1}{2}+r),h)\\ (\triangle(\lambda,\gamma+r),h)\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\ \Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\ \Gamma(\beta+\frac{1}{2})}H^{l+2\lambda,\,u}_{p+2\lambda,\,q+2\lambda}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}, (\triangle(\lambda,\gamma-\alpha+\frac{1}{2}),h), (\triangle(\lambda,\gamma-\beta+\frac{1}{2}),h)\\ (\triangle(\lambda,\gamma),h), (\triangle(\lambda,\gamma-\alpha-\beta+\frac{1}{2}),h), \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot8)$$

जहाँ λ, r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं

$$\sum_{1}^{u}(\alpha_j)-\sum_{u+1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{1}^{l}(\beta_j)-\sum_{l+1}^{q}(\beta_j)\equiv\phi>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi;\ h>0.$$

की स्थापना मैकराबर्ट के परिणाम[10] की सहायता से की जा सकती है
अर्थात्

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha,\beta,\gamma;1\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \gamma+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\beta+\frac{1}{2})\Gamma(\gamma-\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\gamma-\beta+\frac{1}{2})}. \quad (2\cdot9)$$

(ix) **नवम संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2\alpha)_r(1-2\alpha)_r}{r!\,2^r\,(2\rho)_r}H^{l+\lambda,\,u}_{p+2\lambda,\,q+\lambda}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}, (\triangle(2\lambda,2\gamma-2\rho+1+r),h)\\ (\triangle(\lambda,\gamma+r), \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\rho)\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha+\rho)}H^{l+\lambda,\,u}_{p+2\lambda,\,q+\lambda}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\},(\triangle(\lambda,\gamma-\rho+\left|\begin{matrix}\alpha+\frac{1}{2}\\1-\alpha\end{matrix}\right|),h)\\ (\triangle(\lambda,\gamma),h),\{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot10)$$

जहाँ λ, r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं, $h>0$, $R(\gamma)>0$,

$$\sum_{1}^{u}(\alpha_j)-\sum_{u+1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{1}^{l}(\beta_j)-\sum_{l+1}^{q}(\beta_j)-\lambda h\equiv\phi<0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi.$$

उपपत्ति

बाईं ओर के H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल (1·1) के रूप में अभिव्यक्त करने पर, संकलन तथा समाकल के क्रम को परिवर्तित करने पर, (1·8) का उपयोग करने पर हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+a_j s)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+i}{\lambda}-hs\right)x^s}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-a_j s)\prod_{i=0}^{2\lambda-1}\Gamma\left(\frac{2\gamma-2\rho+1+i}{2\lambda}-hs\right)} \times {}_3F_2\left[\begin{matrix}2\alpha, 1-2\alpha, \gamma-\lambda hs\ ;\ 1\\ 2\rho, 2\gamma-2\rho+1-2\lambda hs\end{matrix}\right] ds$$

की प्राप्ति होगी। व्हिपल प्रमेय [9, p. 364], लेगेंड्र का द्वित्वीकरण सूत्र [11, p. 24], (1.7) तथा (1·1) के प्रयोग करने से परिणाम की प्राप्ति होगी।

(x) दशम संकलन

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(\alpha)_r(\frac{1}{2}\alpha+1)_r}{r!\,(\frac{1}{2}\alpha)_r}H^{l,u}_{p+4\lambda,q}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}, (\triangle(\lambda, \alpha+1+r-\left|\begin{smallmatrix}\beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right|), h), (\triangle(\lambda, 1-r-\left|\begin{smallmatrix}\beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right|), h)\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \tag{2·11}$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha+1/2}\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{\alpha-\beta-\gamma}\Gamma(\alpha+1)}H^{l,u}_{p+4\lambda,q}\left[2^{2\lambda h}x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}, (\triangle(\lambda, 1-\left|\begin{smallmatrix}\beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right|), h), (\triangle(2\lambda, \alpha-\beta-\gamma+1), h)\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

यदि λ, r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हों, $h>0$, $Re(\alpha-2\beta-2\gamma)>-2$

$$\sum_{1}^{u}(a_j)-\sum_{u+1}^{p}(a_j)+\sum_{1}^{l}(\beta_j)-\sum_{l+1}^{q}(\beta_j)-4\lambda h\equiv\phi>0, \quad |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi.$$

उपपत्ति

बाईं ओर (1·1) से प्रतिस्थापित करने पर, संकलन तथा समाकलन के क्रम को बदलने पर, तथा (1·8) एवं (1·10) का उपयोग करने पर श्रेणी का स्वरूप

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+a_j s)}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-a_j s)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\alpha-\beta+1+i}{\lambda}-hs\right)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\alpha-\gamma+1+i}{\lambda}-hs\right)} \times \frac{1}{\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{1-\beta+i}{\lambda}-hs\right)\prod_{i-0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{1-\gamma+i}{\lambda}-hs\right)}x^s I\,ds$$

होगा जहाँ

$$I={}_4F_3\left[\begin{matrix}\alpha, \frac{1}{2}\alpha+1, \beta+\lambda hs, \gamma+\lambda hs;\ -1\\ \frac{1}{2}\alpha, \alpha-\beta+1-\lambda hs, \alpha-\gamma+1-\lambda hs\end{matrix}\right]$$

व्हिपल प्रमेय [9, p. 368], (1·7) तथा (1·1) के उपयोग द्वारा अभीष्ट परिणाम प्राप्त होगा।

(xi) **एकादश संकलन**

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (k)_r (\frac{1}{2}k+1)_r}{r!\,(\frac{1}{2}k)_r} H^{l,\,u}_{p+b\lambda,\,q}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\},(\triangle(\lambda, r+\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right|), h), (\triangle(\lambda,-k-r+\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right|), h)\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, 2^{-k}\, \lambda^{k+1/2}}{\Gamma(k+1)} (\tfrac{3}{4})^{\alpha+\beta+\gamma-2k-5/2}$$

$$\times H^{l+3\lambda,\,u}_{p+9\lambda,\,q+3\lambda}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\},\ (\triangle(\lambda,-k+\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right|), h), (\triangle(2\lambda,-k-1+\left|\begin{matrix}\alpha+\beta\\ \beta+\gamma\\ \gamma+\alpha\end{matrix}\right|), h)\\ (\triangle(3\lambda, \alpha+\beta+\gamma-2k-2), h), \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot12)$$

जहाँ λ, r धनात्मक पूर्ण संख्यायें हैं, $h>0$, $R_e(\alpha+\beta+\gamma-2k)>2$,

$$\sum_{1}^{u}(\alpha_j)-\sum_{u+1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{1}^{l}(\beta_j)-\sum_{l+1}^{q}(\beta_j)-b\lambda h\equiv\phi>0,\quad |\arg x|<\tfrac{1}{2}\phi\pi.$$

उपपत्ति

पहले की भाँति अग्रसर होने पर श्रेणी का स्वरूप

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\prod_{j=l+1}^{l}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\alpha+i}{\lambda}-hs\right)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\beta+i}{\lambda}-hs\right)}$$

$$\times \frac{x^s\, I\, ds}{\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+i}{\lambda}-hs\right)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\alpha-k+i}{\lambda}-hs\right)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\beta-k+i}{\lambda}-hs\right)\prod_{i=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\gamma-k+i}{\lambda}-hs\right)}$$

होगा जहाँ

$$I={}_5F_4\left[\begin{matrix}k,\ \frac{1}{2}k+1,\ 1-\alpha+k+\lambda hs,\ 1-\beta+k+\lambda hs,\ 1-\gamma+k+\lambda hs;\ 1\\ \frac{1}{2}k,\ \alpha-\lambda hs,\ \beta-\lambda hs,\ \gamma-\lambda hs\end{matrix}\right].$$

दुग्गल की द्वितीय प्रमेय [9, p.372], (1·7) तथा (1·1), के उपयोग से अभीष्ट परिणाम प्राप्त होगा।

परिणामों में व्यक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत उपर्युक्त संकलनों की उपपत्ति में समाकलन एवं संकलन के क्रम का प्रतीपन [5 p. 500] के अनुरूप है।

3. विशिष्ट दशायें

(a) (2·1) में $l+\lambda$ से l अर्थात $q+\lambda$ को q द्वारा प्रतिस्थापित करने पर तथा $\alpha_i=\beta_j=\alpha=1$ $(i=\lambda+1, \ldots, p; j=1, \ldots, q)$, मानने पर हमें एक ज्ञात परिणाम [2, p. 13 (3·5)] प्राप्त होगा।

(b) (2·2) में $u+\lambda$ को u द्वारा अर्थात $p+\lambda$ को p द्वारा प्रतिस्थापित करने पर $\alpha_i=\beta_j=\alpha=1$ $(i=\lambda+1, \ldots, p; j=1, \ldots, q)$ रखने पर तथा पुनः l, n, p, q को $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ क्रमशः प्रतिस्थापित करने पर एक अन्य ज्ञात सम्बन्ध [3, p. 271 (3·4)] प्राप्त होगा।

(c) (2·6) में $a_j=\beta_t=h=1$ ($j=1, ..., p$; $t=1, ..., q$) रखने पर ज्ञात परिणाम [6, (3·8)] की प्राप्ति होगी ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डा० आर० के० सक्सेना का अत्यन्त कृतज्ञ हूँ जिन्होंने प्रस्तुत शोध पत्र की तैयारी में मेरा मार्ग-दर्शन किया है ।

निर्देश

1. बेटमान प्रोजेक्ट । Higher Transcendental Functions. **भाग 1** **मैकग्राहिल** 1953.
2. भिसे, वी० एस० । **जर्न०इंडियन मैथ०सोसा०**, 1963, **27(1)**, 9–17.
3. वही । **मैथ० एनालेन**, 1964, **154**, 267–272.
4. ब्राक्शमा, बी० एल० जे० । Compos. Math. 1963, **15**, 239–341.
5. ब्रामविच, जी० जे० आई० । An Introduction to the Theory of Infinite series, 1959.
6. छाबरा, एस० पी० । **(प्रोसी० नेश० एके० साइंस, इंडिया) स्वीकृत**
7. फाक्स, सी० । **ट्राञ्जे० आमें० मैथा० सोसा०**, 1961, **98**, 395–426
8. गुप्ता, के सी० तथा जैन, यू० सी० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया) में प्रकाशनार्थ स्वीकृत ।**
9. मैकराबर्ट, टी० एम० । Functions of a Complex Variable, **मैकमिलन, न्यूयार्क** 1962 .
10. वही । **प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसो०**, 1958, **3**, 96.
11. रेनविले, ई० डी० । Special Functions, **मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क**, **1960.**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No 2, April 1970, Pages 67-72

दो सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदियों के गुणनफल

मणिलाल शाह
गणित विभाग, पी०एम०बी०जी० कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—दिसम्बर 10, 1968]

सारांश

इस शोधपत्र में दो श्रेणीबद्ध सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदियों के गुणनफल के लिए सूत्र व्युत्पन्न किये गये हैं जिसमें एक सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी

$$F_n(x) = x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n),\ a_1, \dots a_p \\ b_1, \dots b_q\end{matrix}; \mu x^c\right]$$

द्वारा पारिभाषित है जिसमें $\triangle(\delta, -n)$ से δ-प्राचलों के समूह $\frac{-n}{\delta}, \frac{-n+1}{\delta}, \dots, \frac{-n+\delta-1}{\delta}$ का बोध होता है, तथा δ, n धन पूर्णांक हैं। ये फल अत्यन्त व्यापक प्रतीत होते हैं जिससे प्राचलों के समुचित चुनाव होने पर कई ज्ञात फल उनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं।

Abstract

On product of two generalized hypergeometric polynomials. *By* Manilal Shah, Department of Mathematics, P. M. B. G. College, Indore.

In this paper, using a generalized hypergeometric polynomial defined by

$$F_n(x) = x^{(\delta-1)n}\ {}_{p\cdot\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta, -n),\ a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q\end{matrix} \cdot \mu x^c\right]$$

where $\triangle(\delta, -n)$ denotes the set of δ-parameters:

$\frac{-n}{\delta}, \frac{-n+1}{\delta}, \dots, \frac{-n-\delta-1}{\delta}$ and δ, n are positive integers, we have derived the formulae for product of two generalised hypergeometric polynomials in series. The results appeared to be of general character which yield many known results, as their particular cases with proper choice of parameters.

1. इस शोधपत्र का उद्देश्य श्रेणीबद्ध दो सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदियों के गुणनफल के लिए एक सूत्र स्थापित करना है। यह बहुपदी सार्वीकृत रूप में हैं जिसके प्राचलों के विशिष्टीकरण से कई फल प्राप्त होते हैं।

संक्षेपण एवं लेखन-सौकर्य की दृष्टि से हम लघ्वीकृत संकेत का प्रयोग करेंगे।

$$ {}_pF_q(x)={}_pF_q\left(\begin{matrix}a_p\\b_q\end{matrix}\middle|x\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a_p)_r\,x^r}{(b_q)_r\,r!}. $$

इस प्रकार $(a_p)_r$ की विवेचना $\prod_{j=1}^{p}(a_j)_r$ के रूप में तथा इसी प्रकार $(b_q)_r$ की भी की जानी है।

सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी [5, eqn. 2·1] को

$$ F_n(x)=x^{(\delta-1)n}\;{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n); & a_p\\ & b_q\end{matrix};\mu x^c\right] \tag{1·1} $$

द्वारा पारिभाषित किया जाता है जिसमें δ तथा n धन पूर्ण संख्याएं हैं; और संकेत $\triangle(\delta,-n)$ द्वारा δ-प्राचलों के समूह $\frac{-n}{\delta},\frac{-n+1}{\delta},\ldots,\frac{-n+\delta-1}{\delta}$ का निरूपण किया गया है।

2. दो सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदियों (1·1) के गुणनफल पर विचार करने पर

$$ F_n(x)F_m(y)=x^{(\delta-1)n}\;{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n), & a_p\\ & b_q\end{matrix};\mu x^c\right]y^{(\gamma-1)m}\;{}_{l+\gamma}F_k\left[\begin{matrix}\triangle(\gamma,-m), & \rho_l\\ & \sigma_k\end{matrix};\lambda y^d\right] $$

$$ =x^{(\delta-1)n}\,y^{(\gamma-1)m}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_r(a_p)_r\,\mu^r x^{cr}}{r!\,(b_q)_r}\times\frac{\prod_{i=0}^{\gamma-1}\left(\frac{-m+i}{\gamma}\right)_s(\rho_l)_s\,\lambda^s y^{ds}}{s!\,(\sigma_k)_s} \tag{2·1} $$

r को $r-s$ द्वारा पुनः स्थापित करने पर तथा $(\alpha)_{n-k}=\frac{(-1)^k(\alpha)_n}{(1-\alpha-n)_n}$ का प्रयोग $0\leqslant k\leqslant n$, के लिए प्रयुक्त करने पर

$$ x^{(\delta-1)n}\;{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n), & a_p\\ & b_q\end{matrix};\mu x^c\right]y^{(\gamma-1)m}\;{}_{l+\gamma}F_k\left[\begin{matrix}\triangle(\gamma,-m) & \rho_l\\ & \sigma_k\end{matrix};\lambda y^d\right] $$

$$ =x^{(\delta-1)n}\,y^{(\gamma-1)m}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_r(a_p)_r\,\mu^r x^{cr}}{r!\,(b_q)_r} \tag{2·2} $$

$$ \times\;{}_{l+q+\gamma+1}F_{p+\delta+k}\left(\begin{matrix}-(m/\gamma),\ldots,(-m+\gamma-1)/\gamma, 1-b_q-r, -r, \rho_l\\ 1+(n/\delta)-r,\ldots,1+(n-\delta+1/\delta)-r, 1-a_p-r, \sigma_k\end{matrix}\middle|\frac{\lambda}{\mu}\frac{y^d}{x^c}(-1)^{p-q+\delta-1}\right). $$

$$x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^c\right]y^{(\gamma-1)m}\ {}_{l+\gamma}F_k\left[\begin{matrix}\triangle(\gamma,-m),\rho_l\\ \sigma_k\end{matrix};\lambda y^d\right]$$

$$=x^{(\delta-1)n}y^{(\gamma-1)m}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{\gamma-1}\left(\frac{-m+i}{\gamma}\right)_s(\rho)_s\lambda^s y^{ds}}{s!\,(\sigma_k)_s} \tag{2·3}$$

$$\times{}_{p+k+\delta+1}F_{l+q+\gamma}\left(\begin{matrix}(-n/\delta),\ldots,(-n+\delta-1/\delta),1-\sigma_k-s,-s,a_p\\ 1+(m/\gamma)-s,\ldots,1+(m-\gamma+1/\gamma)-s,1-\rho_l-s,b_q\end{matrix}\middle|\frac{\mu x^c}{\lambda y^d}(-1)^{l+\gamma-k-1}\right).$$

(2·2) **की विशिष्ट दशायें :**

(i) $\delta=\gamma=1$, $c=d=1$, तथा $y=x$ पर $b_1=-n$, $\sigma_1=-m$, करने पर हमें एक ज्ञात फल [4, p. 395 eqn. (3.5)] प्राप्त होगा।

(ii) $p=q=l=k=2$, $a_1=a$, $a_2=b$, $b_1=-n$, $b_2=c$. $\rho_1=a'$, $\rho_2=b'$, $\sigma_1=-m$, $\sigma_2=c'$, रखने पर हमें एक अन्य ज्ञात फल [2, p. (187), eqn. (14)] प्राप्त होगा।

इसी प्रकार प्राचलों के उपयुक्त चुनाव द्वारा हमें अन्य ज्ञात फल [2, p. 187, eqns. (12), (13) तथा (15)] प्राप्त हो सकते हैं।

(iii) $p=q=2$, $l=k=2$, $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$, $b_1=-n$, $b_2=\alpha+\beta+\frac{1}{2}$, $\rho_1=\alpha$, $\rho_2=\beta$, $\sigma_1=-m$, $\sigma_2=\alpha+\beta+\frac{1}{2}$, $\lambda=\mu=1$, रखने पर हमें

$$\left[{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix};x\right)\right]^2=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r x^r}{r!\,(\alpha+\beta+\frac{1}{2})_r}\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-r,\alpha,\beta,\frac{1}{2}-\alpha-\beta-r\\ 1-\alpha-r,1-\beta-r,\alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix};\right) \tag{2·4}$$

प्राप्त होगा।

दाहिनी ओर ज्ञात फल [1, p. (186), eqn. (2.4)] का प्रयोग करने पर

$${}_4F_3\left(\begin{matrix}-m,\alpha,\beta,\frac{1}{2}-\alpha-\beta-m\\ 1-\alpha-m,1-\beta-m,\alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix};\right)=\frac{(2\alpha)_m(2\beta)_m(\alpha+\beta)_m}{(\alpha)_m(\beta)_m(2\alpha+2\beta)_m},$$

हमें क्लाउसेन [2, p. (185), eqn. (1)] की सर्वसमिका प्राप्त होगी।

(iv) $p=q=1$, $l=k=2$, $\lambda=\mu=1$, $a_1=c-a-b$, $b_1=-n$, $\rho_1=a$, $\rho_2=b$, $\sigma_1=-m$, $\sigma_2=c$ रखने पर तथा सालसिट्ज प्रमेय का उपयोग करने पर हमें यूलर द्वारा प्राप्त ज्ञात फल [6, p. (60), eqn. (5)] मिलेगा।

(v) $p=q=2$, $l=k=2$, $\lambda=\mu=1$, $a_1=\rho_1=\alpha$, $a_2=\rho_2=\beta$, $b_1=-n$, $b_2=\alpha+\beta-\frac{1}{2}$, $\sigma_1=-m$, $\sigma_2=\alpha+\beta+\frac{1}{2}$, रखने पर

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \alpha+\beta-\frac{1}{2}\end{matrix};x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix};x\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r x^r}{r!\,(\alpha+\beta-\frac{1}{2})_r}{}_4F_3\left(\begin{matrix}-r,\alpha,\beta,\frac{3}{2}-\alpha-\beta-r\\ 1-\alpha-r,1-\beta-r,\alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix};\right) \tag{2.5} $$

ज्ञात फल [1, p. (187), eqn. (3.3)] की सहायता से

$$ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-m,\alpha,\beta,\frac{3}{2}-\alpha-\beta-m\\ 1-\alpha-m,1-\beta-m,\alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix};\right)=\frac{(2\alpha)_m(2\beta)_m(\alpha+\beta)_m(\alpha+\beta-\frac{1}{2})_m}{(\alpha)_m(\beta)_m(\alpha+\beta+\frac{1}{2})_m(2\alpha+2\beta-1)_m}, $$

हमें ज्ञात फल [2, p. (186), eqn. (8)] की उपलब्धि होगी।

(vi) $p=q=2,\ l=k=2,\ \lambda=\mu=1,\ a_1=\alpha,\ a_2=\beta,\ b_1=-n,\ b_2=\alpha+\beta-\frac{1}{2},\ \rho_1=\alpha-1.$ $\rho_2=\beta,\ \sigma_1=-m,\ \sigma_2=\alpha+\beta-\frac{1}{2}$, प्रतिस्थापित करने पर

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \alpha+\beta-\frac{1}{2}\end{matrix};x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha-1,\beta\\ \alpha+\beta-\frac{1}{2}\end{matrix};x\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r x^r}{r!(\alpha+\beta-\frac{1}{2})_r}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-r,\alpha-1,\beta,\frac{3}{2}-\alpha-\beta-r\\ 1-\alpha-r,1-\beta-r,\alpha+\beta-\frac{1}{2}\end{matrix};\right) \tag{2·6} $$

ज्ञात फल [1, p. (187), eqn. (3.4)] का प्रयोग करने पर

$$ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-m,\alpha,\beta-1,\frac{3}{2}-\alpha-\beta-m\\ 1-\alpha-m,1-\beta-m,\alpha+\beta-\frac{1}{2}\end{matrix};\right)=\frac{(2\alpha)_m(2\beta-1)_m(\alpha+\beta-1)_m}{(\alpha)_m(\beta)_m(2\alpha+2\beta-2)_m} $$

α तथा β को परस्पर विनिमय करते हुये हमें एक ज्ञात फल [2, p. 187, eqn. (9)] प्राप्त होगा।

(vii) $p=l=0,\ q=k=2,\ \lambda=\mu=1,\ b_1=-n,\ b_2=\rho,\ \sigma_1=-m,\ \sigma_2=\sigma$ रखने पर तथा गॉस के प्रमेय के उपयोग से हमें एक ज्ञात फल [2, p. (185), eqn. (2)] मिलेगा।

(viii) $p=0,\ q=1,\ l=1,\ k=2,\ b_1=-n,\ \rho_1=a,\ \sigma_1=-m,\ \sigma_2=b,\ \mu=-1,\ \lambda=1$, रखने पर तथा गॉस के प्रमेय के उपयोग द्वारा हमें एक ज्ञात फल [6, p. (125), eqn. (2)] प्राप्त होगा। प्राचलों के समुचित चुनाव एवं व्हिपल डिक्सन के प्रमेयों का व्यवहार करते हुये हमें अन्य कई ज्ञात फल प्राप्त हो सकते हैं।

3. हाइपरज्यामितीय रूपान्तर

इस अनुभाग में हम कतिपय हाइपरज्यामितीय रूपान्तरों पर विचार करेंगे।

(अ) (2·2) तथा (2·3) में $y=x,\ c=d=1$, रखने पर, x^r के गुणांकों का समीकरण करने पर हमें निम्नांकित महत्वपूर्ण रूपान्तर प्राप्त होगा

$$ \frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_r(a_p)_r\,\mu^r}{(b_q)_r}\;{}_{\gamma+l+q+1}F_{p+k+\delta}\left(\begin{matrix}\triangle(\gamma,-m),\rho_l,1-b_q-r\\ \sigma_k,1+\frac{n}{\delta}-r,\dots,1+\frac{n-\delta+1}{\delta}-r,1-a_p-r\end{matrix}\middle|\frac{\lambda}{\mu}(-1)^{p-q+\delta-1}\right) $$

$$=\frac{\prod_{i=0}^{\gamma-1}\left(\frac{-m+i}{\gamma}\right)_r (\rho_l)_r \lambda^r}{(\sigma_0)_r}\ {}_{p+\delta+k+1}F_{q+\gamma+l}\left(\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_p,\ -r,\ 1-\sigma_k-r \\ b_q,\ 1+\frac{m}{\gamma}-r,\ \ldots,\ 1+\frac{m-\gamma+1}{\gamma}-r,\ 1-\rho_l-r\end{matrix}\ \middle|\ \frac{\mu}{\lambda}(-1)^{l-k+\gamma-1}\right) \quad (3\cdot1)$$

(3·1) की विशिष्ट दशायें

जब $\delta=\gamma=1$

(i) $l=k-1=0,\ b_1=-n,\ \sigma_1=-m,\ \mu=-z,\ \lambda=1$, मानने पर हमें ज्ञात फल [4, p. (395), eqn. (3·8)] प्राप्त होगा।

(ii) $p=q=2,\ l=k=2,\ \lambda=\mu=1,\ a_1=\rho_1=\alpha,\ a_2=\rho_2=\beta,\ b_1=-n,\ \sigma_1=-m,$ $b_2=\frac{1}{2}+\alpha+\beta,\ \sigma_2=\alpha+\beta-\frac{1}{2}$, प्रतिस्थापित करने पर एक सर्व समिका प्राप्त होगी :

$$(\alpha+\beta-\tfrac{1}{2})_r\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-r,\ \alpha,\ \beta,\ \frac{1}{2}-\alpha-\beta-r \\ \alpha+\beta-\frac{1}{2},\ 1-\alpha-r,\ 1-\beta-r\end{matrix};\right)$$

$$=(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2})_r\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-r,\ \alpha,\ \beta,\ \frac{3}{2}-\alpha-\beta-r \\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 1-\alpha-r,\ 1-\beta-r\end{matrix};\right). \quad (3\cdot2)$$

(iii) $p=q=2,\ l=k=2,\ \lambda=\mu=1,\ a_1=\alpha,\ a_2=\beta,\ b_1=-n,\ b_2=\alpha+\beta-\frac{1}{2},\ \rho_1=\alpha,$ $\rho_2=\beta-1,\ \sigma_1=-m,\ \sigma_2=\alpha+\beta-\frac{1}{2}$ रखने पर एक सर्वसमिका प्राप्त होगी :

$$(\beta)_r\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-r,\ \alpha,\ \beta,\ \frac{3}{2}-\alpha-\beta-r \\ \alpha+\beta-\frac{1}{2},\ 1-\alpha-r,\ 1-\beta-r\end{matrix};\right)$$

$$=(\beta-1)_r\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-r,\ \alpha,\ \beta,\ \frac{3}{2}-\alpha-\beta-r \\ \alpha+\beta-\frac{1}{2},\ 1-\alpha-r,\ 2-\beta-r\end{matrix};\right). \quad (3\cdot3)$$

(अ) (1·1) से प्रारम्भ करके तथा हाइपरज्यामितीय बहुपदी को श्रेणी रूप में अभिव्यक्त करने पर

$$x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_p \\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_r (a_p)_r\ \mu^r}{r!\ (b_q)_r}\ x^{(\delta-1)n+cr}. \quad (3\cdot4)$$

r को $n-r$, द्वारा पुनः स्थापित करते हुये एवं सूत्र $(\alpha)_{n-k}=\frac{(-1)^k(\alpha)_n}{(1-\alpha-n)_k}$ यदि $0\leqslant k\leqslant n$, प्रयोग करने पर हमें

$$x^{(\delta-1)}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\Delta(\delta, -n),\ a_p \\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]$$

$$= \frac{\mu^n\, x^{(\delta-1)n+cn} \prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_n (a_p)_n}{n\,!\,(b_q)_n}$$

$$\times_{q\cdot 2}F_{p+\delta}\left(\begin{matrix}-n,\ 1-b_q-n,\ 1 \\ 1-n+\frac{n}{\delta},\ 1-n+\frac{n-1}{\delta},\ \ldots,\ 1-n+\frac{n-\delta+1}{\delta},\ 1-a_p-n\end{matrix}\left|\frac{(-1)^{p-q+\delta-1}}{\mu x^c}\right.\right) \quad (3\cdot5)$$

प्राप्त होगा।

(3·5) **की विशिष्ट दशायें :**

(i) $\delta=c=\mu=1,\ a_1=n+1,\ b_1=1,\ b_2=\frac{1}{2}$, रखने पर हमें एक ज्ञात फल [4, p. 807, eqn. (6)] प्राप्त होगा।

(ii) $\delta=c=\mu=1$ रखने पर हमें एक ज्ञात फल [4, p. (395), eqn. (3·8)] मिलेगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० बी० एम० भिसे का आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र के लेखन में मार्गदर्शन किया है।

निर्देश

1. भट्ट, आर० सी०। **मैथेमेटिश (कंटानिया)**, 1965, **20(2)**, 185-188.

2. ऐर्डेल्यी, ए०। Higher transcendental functions **भाग** I" **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1953.

3. फासेनमेयर, सिस्टर मेरी सेलीन। **बुले० अमे० मैथ० सोसा०**, 1947, **53**, 806-12.

4. फील्डस, जे० एल० तथा विम्प, जेट। **मैथेमैटिक्स कम्पुटेशन**, 1961, **15**(76), 390-95.

5. शाह, मणिलाल। **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1967; **37**,

6. रेनविले, ई० डी०। Special Functions **मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क**, 1960.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 2, April 1970, Pages 73-83

सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के लिए रोड्रिग्स सूत्र

मणिलाल शाह
गणित विभाग, बी० एम० बी० जी० कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—अक्टूबर 10, 1968]

सारांश

$$F_n(x)=x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_1,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]$$

द्वारा पारिभाषित सर्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के लिये जिसमें $\triangle(\delta,-n)$ के द्वारा δ-प्राचलों के समूह $\frac{-n}{\delta}, \frac{-n+1}{\delta}, \ldots, \frac{-n+\delta-1}{\delta}$ का बोध होता है तथा δ, n धन पूर्णसंख्यायें हैं, रोड्रिग्स के सूत्रों की स्थापना की गई है। इनका सम्प्रयोग कतिपय समाकलों एवं अवकलन सूत्रों का मान निकालने के लिये किया गया है। कई ज्ञात एवं अज्ञात फल दिये गये हैं।

Abstract

On the Rodrigues' formulae for a generalized hypergeometric polynomial and their applications. *By* Manilal Shah, Department of Mathematics, P. M. B. G. College, Indore.

Rodrigues' formulae, for generalized hypergeomeric polynomial defined as

$$F_n(x)=x^{(\delta-1)}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ a_1,\ \ldots\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\mu x^c\right]$$

where $\triangle\ (\delta,-n)$ stands for the set of δ-parameters $\frac{-n}{\delta}, \frac{-n+1}{\delta}\ \ldots, \frac{-n+\delta-1}{\delta}$ and δ, n are positive integers, have been established. They have been applied to evaluate certain integrals and some differentiation formulae. Many known results have been given.

1. विषय प्रवेश

इस शोधपत्र में हम सर्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के लिए रोड्रिग्स के सूत्र प्राप्त करेंगे। हाइपरज्यामितीय बहुपदी सार्वीकृत रूप है और यह प्राचलों के विशिष्टीकरण से कई ज्ञात तथा अज्ञात

फल प्रदान करता है। रोड्रिग्स सूत्रों के सम्प्रयोग द्वारा कतिपय समाकलों का मूल्यांकन किया गया है और कुछ अवकलन सम्बन्ध भी प्राप्त किए गए हैं।

संक्षेपण एवं लेखन-सुगमता की दृष्टि से हम निम्नांकित लघ्वीकृत संकेतों का अनुसरण करेंगे

$$ {}_pF_q(x) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\middle| x\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a_p)_r\, x^r}{(b_q)_r\, r\,!}\,. $$

इस प्रकार $(a_p)_r$ की विवेचना $\prod_{j=1}^{p} (a_j)_r$ के रूप में तथा इसी प्रकार $(b_q)_r$ की विवेचना हमने सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी [4, eqn. (2·1)] की परिभाषा

$$ F_n(x) = x^{(\delta-1)n}\ {}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix} \triangle(\delta, -n),\ a_p \\ b_q \end{matrix};\ \mu x^c\right] \tag{1·1} $$

के रूप में की है जहाँ $\triangle(\delta, -n)$ द्वारा δ-प्राचलों के समूह $\frac{-n}{\delta}, \frac{-n+1}{\delta}, \ldots, \frac{-n+\delta-1}{\delta}$ का बोध होता है और δ तथा n धन पूर्ण संख्याएँ हैं।

यह बहुपदी $\delta = \mu = e = 1$, रखने पर तथा प्राचलों के उचित चुनाव से

$$ f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix} a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q \end{matrix}; x\right) = \frac{(1+\alpha)_n}{n\,!}\ {}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix} -n,\ n+\alpha+\beta+1,\ a_2 \ldots, a_p \\ 1+\alpha,\ \frac{1}{2},\ b_3, \ldots, b_q \end{matrix}; x\right) \tag{1·2} $$

प्रदान करता है जो सार्वीकृत सिस्टर सेलीन बहुपदी [(4), eqn. 2·2] है और

$$ H_n^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n\,!}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n,\ n+\alpha+\beta+1,\ \xi \\ 1+\alpha,\qquad p \end{matrix}; x\right) \tag{1·3} $$

एक सार्वीकृत राइस का बहुपदी [1, eqn. 2·3, p. (158)] है।

2. हम सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के लिए, जिसमें c एक धन पूर्णसंख्या है, रोड्रिग्स के सूत्र प्राप्त करेंगे :–

हाइपरज्यामितीय बहुपदी को

$$ \frac{x^n}{n!}\ {}_{p+\delta+c}F_{q+c}\left[\begin{matrix} \triangle(\delta, -n),\ \triangle(c, 1),\ a_p \\ \triangle(c, n+1),\ b_q \end{matrix};\ \mu x^c\right] $$

$$ = \frac{1}{n\,!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{\delta-1}\left(\frac{-n+i}{\delta}\right)_r \prod_{i=0}^{c-1}\left(\frac{1+i}{c}\right)_r (a_p)_r\, \mu^r x^{n+cr}}{r\,! \prod_{i=0}^{c-1}\left(\frac{n+1+i}{c}\right)_r (b_q)_r}. \tag{2·1} $$

के रूप से विचार करने पर, दोनों ओर x के सापेक्ष n बार अवकलित करने पर, सम्बन्ध

$$(a)_{nk}=k^{nk}\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{a+i}{k}\right)_n$$

का प्रयोग करने पर तथा दोनों ओर $x^{(\delta-1)}$ से गुणा करने पर हमें रोड्रिग्स के सूत्र

$$x^{(\delta-1)}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^c\right] \tag{2·2}$$

$$=\frac{1}{n!}\,x^{(\delta-1)n}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^n\,{}_{p+\delta+c}F_{q+c}\left(\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ \triangle(c,1),\ a_p\\ \triangle(c,n+1),\ b_q\end{matrix};\mu x^c\right)\right].$$

के रूप में प्राप्त होंगे। (2·2) में $\delta=c=1$ रखने पर हमें

$${}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n,\ a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x\right)=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^n{}_{p+2}F_{q+1}\left(\begin{matrix}-n,\ a_p,\ 1\\ b_q,\ n+1\end{matrix};\mu x\right)\right]. \tag{2·3}$$

प्राप्त होगा।

(2·3) की विशिष्ट दशा

(a) (2·3) में $a_1=n+\alpha+\beta+1;\ b_1=\frac{1}{2},\ b_2=1+\alpha$ रखते हुये और दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)_n}{n!}$ से गुणा करने पर

$$f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_3,\ \ldots,\ b_q\end{matrix};\mu x\right)=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^n f_n^{(\alpha,\beta)}\left(\begin{matrix}a_2,\ \ldots,\ a_p,\ 1\\ b_3,\ \ldots,\ b_q,\ 1+n\end{matrix};\mu x\right)\right] \tag{2·4}$$

प्राप्त होता है जो सार्वीकृत सिस्टर सेलीन बहुपदी का रोड्रिग्स सूत्र है।

(i) (2·4), से $p=q=3,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\xi,\ b_3=p$ रखने पर

$$H_n^{(\alpha,\beta)}(\xi,p,\mu x)=\frac{1}{n!}\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^n\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,\ n+\alpha+\beta+1,\ \xi,\ 1\\ 1+\alpha,\ p,\ 1+n\end{matrix};\mu x\right)\right] \tag{2·5}$$

प्राप्त होगा जो सार्वीकृत राइस के बहुपदी का रोड्रिग्स सूत्र है और जो $\alpha=\beta=0$ होने पर एक ज्ञात फलन [2, eq, 1·13, p. 1] में घटित हो जाता है

(ii) (2·4) में $p=q=2,\ a_2=\frac{1}{2},\ \mu=1$ प्रतिस्थापित करने पर तथा x को $\frac{1-x}{2}$ द्वारा पुनः स्थापित करने पर

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n 2^n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)^n H_n^{(\alpha,\beta)}\left(1,\ 1+n,\ \frac{1-x}{2}\right)\right] \tag{2·6}$$

जो $\alpha=\beta=0$ होने पर ज्ञात फल [3, eqn. 7, p. 162] में लघूकरित हो जाता है।

(iii) (2·4), में $p=2, q=3; a_2=\frac{1}{2}, b_3=1$ तथा $\alpha=\beta=0$, रखने पर एक ज्ञात फल [2, eqn. 1·6, p. 2] मिलता है।

(b) (2·3) में $p=0, q=1, b_1=1+\alpha, \mu=1$ रखने पर तथा दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)_n}{n!}$, से गुणा करने पर

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^n\,{}_2F_2\left(\begin{matrix}-n,\ 1\\1+n,\ 1+\alpha\end{matrix};x\right)\right] \tag{2·7}$$

जो $\alpha=0$ होने पर

$$L_n(x)=\frac{n!}{2n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^n L_n^{(n)}(x)\right],$$

में घटित हो जाता है।

(2·2) के फल का सार्वीकरण हाइपरज्यामितीय बहुपदी

$$x^{\gamma+n}{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right] \tag{2·8}$$

को व्यक्त करके किया जा सकता है जिसमें c एक धन पूर्णांक है जब दोनों ओर x के सापेक्ष n बार अवकलित किया गया हो। इस प्रकार

$$x^{-\gamma}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{\gamma+n}{}_{p+\delta}F_q\left(\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right)\right]$$

$$=(1+\gamma)_n\,{}_{p+\delta+c}F_{q+c}\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ \triangle(c,\ 1+\gamma+n),\ a_p\\ \triangle(c,\ 1+\gamma),\ b_q\end{matrix};\ \mu x^c\right]. \tag{2·9}$$

$\delta=c=1$, होने पर यह

$$x^{-\gamma}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{\gamma+n}\,{}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n,\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x\right)\right]$$

$$=(1+\gamma)_n\,{}_{p+2}F_{q+1}\left(\begin{matrix}-n,\ a_p,\ 1+\gamma+n\\ b_q,\ 1+\gamma\end{matrix};\ \mu x\right) \tag{2·10}$$

में घटित होता है जो एक ज्ञात फल [2, eqn. 2·1, p. 2] है।

(2·10) की विशिष्ट दशायें

(2·10) में $a_1=n+\alpha+\beta+1,\ b_1=1+\alpha,\ b_2=\frac{1}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर तथा दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)_n}{n!}$ से गुणा करने पर

$$x^{-\gamma}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{\gamma+n} f_n^{(\alpha,\beta)}\begin{pmatrix} a_2, \ldots, a_p \\ b_3, \ldots, b_q \end{pmatrix}; \mu x\right]$$

$$= (1+\gamma)_n f_n^{(\alpha,\beta)}\begin{pmatrix} a_2, \ldots, a_p, 1+\gamma+n \\ b_3, \ldots, b_q; \quad 1+\gamma \end{pmatrix}; \mu x \Big) \tag{2·11}$$

(i) (2·11) में $p=q=3$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\xi$, $b_3=p$, रखने पर

$$x^{-\gamma}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{\gamma+n} H_n^{(\alpha,\beta)}(\xi, p, \mu x)\right]$$

$$= \frac{(1+\alpha)_n(1+\gamma)_n}{n!}\ {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \xi, 1+\gamma+n \\ 1+\alpha, p, 1+\gamma \end{matrix}; \mu x\right). \tag{2·12}$$

(ii) (2·11) में $p=q=2$, $a_2=\frac{1}{2}$, मानने पर

$$x^{-\gamma}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{\gamma+n} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2\mu x)\right]$$

$$=(1+\gamma)_n H_n^{(\alpha,\beta)}(1+\gamma+n, 1+\gamma, \mu x) \tag{2·13}$$

(iii) $p=2$, $q=3$, $a_2=\frac{1}{2}$, $b_3=1$ तथा $\alpha=\beta=0$ रखकर (2·11) से हमें

$$x^{-\gamma}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{\gamma+n} Z_n(\mu x)\right]=(1+\gamma)_n\ {}_3F_3\left(\begin{matrix} -n, n+1, 1+\gamma+n \\ 1, 1, 1+\gamma \end{matrix}; \mu x\right) \tag{2·14}$$

प्राप्त होगा जिसमें $Z_n(x)$ बेटमैन का बहुपदी है ।

(b) (2·10), में $p=0$, $q=1$, $b_1=1+\alpha$ प्रतिस्थापित करने से तथा दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)_n}{u!}$ द्वारा गुणा करने पर एक ज्ञात फल [2, eqns. 2·2, 1·6, p. 2] प्राप्त होगा ।

3. हम सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी के लिए, जब $c=-c'$ हो जहाँ पर c' धन पूर्णसंख्या हो, रोड्रिग्स का सूत्र प्राप्त करेंगे ।

हाइपरज्यामितीय बहुपदी के निम्नांकित रूप पर विचार करें

$$x^{2n}\ {}_{p+\delta+c'}F_{q+c'}\left[\begin{matrix} \triangle(\delta, -n), \triangle(c', -2n), a_p \\ \triangle(c'-n), \quad b_q \end{matrix}; \mu x^{-c'}\right]. \tag{3·1}$$

(3·1) को श्रेणियों में व्यक्त करने पर, x के सापेक्ष n बार अवकलित करने पर तथा निम्नांकित सम्बन्धों की सहायता से

$$\frac{\Gamma(1-a-n)}{\Gamma(1-a)}=\frac{(-1)^n}{(a)_n},\quad (a)_{nk}=k^{nk}\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{a+i}{k}\right)_n, \tag{3·2}$$

हमें

$$\frac{x^n}{n!}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^{-c'}\right]$$

$$=\frac{1}{2n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{2n}\,{}_{p+\delta+c'}F_{q+c'}\left(\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ \triangle(c',-2n),a_p\\ \triangle(c',-n),\ b_q\end{matrix};\mu x^{-c'}\right)\right]. \qquad (3\cdot3)$$

प्राप्त होगा । यदि $\delta=c'=2$, हो तो (3·3)

$$\frac{x^n}{n!}\,{}_{p+2}F_q\left[\frac{-n}{2},\frac{-n+1}{2},\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^{-2}\right]$$

$$=\frac{1}{2n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{2n}\,{}_{p+2}F_q\left(\begin{matrix}-n,\ -n+\frac{1}{2},\ a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^{-2}\right)\right] \qquad (3\cdot4)$$

में घटित हो जावेगा।

(3·4) की विशिष्ट दशायें

(a) $p=1,\ q=2,\ a_1=\gamma-\beta,\ \ b_1=\gamma,\ \ b_2=1-\beta-n,\ \ \mu=1$ रखने पर तथा दोनों ओर $2^n(\beta)_n$, से गुणा करने पर

$$R_n(\beta,\gamma;x)=\frac{1}{2n!}\,2^n(\beta)_n\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{2n}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,\ -n+\frac{1}{2},\ \gamma-\beta\\ \gamma,\ 1-\beta-n\end{matrix};x^{-2}\right)\right] \qquad (3\cdot5)$$

प्राप्त होगा जो बेडीण्ट बहुपदी के लिए रोड्रिग्स का सूत्र है।

(b) $p=q=0,\ \ \mu=-1$, रखने तथा दोनों ओर 2^n के द्वारा गुणा करने पर

$$2^n(\tfrac{1}{2})_n H_n(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{2n}\,{}_2F_0\left(\begin{matrix}-n,\ -n+\frac{1}{2}\\ -\end{matrix};-x^{-2}\right)\right] \qquad (3\cdot6)$$

हरमाइट बहुपदी के लिए रोड्रिग्स का सूत्र प्राप्त होता है ।

(c) $p=0,\ \ q=1,\ \ b_1=-n+\frac{1}{2},\ \ \mu=1$ होने पर तथा दोनों ओर $2^n(\frac{1}{2})_n$, से गुणा करने पर एक ज्ञात फल [3, eqn. 7, p. 162] की प्राप्ति होगी ।

3·1. फल (3·3) का और भी सार्वीकरण हो जावेगा यदि उसे

$$x^{2n+\alpha}\,{}_{p+\delta}F_q\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^{-c'}\right]$$

द्वारा श्रेणी में व्यक्त किया जाय, x के सापेक्ष n बार अवकलित किया जाय तथा (3·2) सम्बन्धों का उपयोग किया जाये । इस प्रकार

$$x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{2n+\alpha}{}_{p+\delta}F_q\left(\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^{-c'}\right)\right]$$

$$=x^n\,\frac{(\alpha+2n)\,!}{(\alpha+n)\,!}\ {}_{p+\delta+c'}F_{q+c'}\left[\begin{matrix}\triangle(\delta,\ -n),\ \ \triangle(c',-\alpha-n\ )\ a_p\\ \triangle(c',-\alpha-2n),b_q\end{matrix};\ \mu x^{-c'}\right]. \qquad (3\cdot7)$$

$\delta=c'=2$, होने पर यह निम्नांकित में घटित होगा

$$x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{2n+\alpha}\ {}_{p+2}F_q\left(\begin{matrix}(-\tfrac{1}{2}n),\ \tfrac{1}{2}(-n+1),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\ \mu x^{-2}\right)\right]$$

$$=x^n\,\frac{(\alpha+2n)\,!}{(\alpha+n)\,!}\ {}_{p+4}F_{q+2}\left(\begin{matrix}-\tfrac{1}{2}n,\ \tfrac{1}{2}(-n+1),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-n),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-n+1),\ a_p\\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-2n),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-2n+1),\ \ b_q\end{matrix};\ \mu x^{-2}\right). \qquad (3\cdot8)$$

(3·8) की विशिष्ट दशायें

(a) $p=1,\ \ q=2,\ a_1=\gamma-\beta,\ \ b_1=\gamma,\ \ b_2=1-\beta-n,\ \ \mu=1$ रखने पर तथा दोनों ओर $\frac{2^n(\beta)_n}{n!}$ से गुणा करने पर

$$x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{n+\alpha}\,R_n(\beta,\ \gamma;\ x)\ \right]$$

$$=\frac{(2x)^n(\beta)_n(\alpha+2n)\,!}{n\,!\ (\alpha+n)\,!}\ {}_5F_4\left(\begin{matrix}-\tfrac{1}{2}n,\ \tfrac{1}{2}(-n+1),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-n),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-n+1),\ \gamma-\beta\\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-2n),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-2n+1),\ \gamma,\ 1-\beta-n\end{matrix};\ x^{-2}\right) \qquad (3\cdot9)$$

(b) $p=q=0,\ \ \mu=-1,$ मानने पर तथा दोनों ओर 2^n से गुणा करने पर

$$x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{n+\alpha}\,H_n(x)\right]$$

$$=\frac{(x)^n\,(\alpha+2n)\,!}{n\,!\ (\alpha+n)\,!}\ {}_4F_2\left(\begin{matrix}-\tfrac{1}{2}n,\ \tfrac{1}{2}(-n+1),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-n),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-n+1)\\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-2n),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-2n+1)\end{matrix};\ -x^{-2}\right). \qquad (3\cdot10)$$

(c) $p=0,\ q=1,\ b_1=-n+\tfrac{1}{2},\ \mu=1,$ मानने पर तथा दोनों ओर $2^n(\tfrac{1}{2})_n$ से गुणा करने पर

$$x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{n+\alpha}\,P_n(x)\ \right]$$

$$=\frac{(2x)^n\,(\alpha+2n)\,!}{n\,!\ (\alpha+n)\,!}\left(\frac{1}{2}\right)_n\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-\tfrac{1}{2}n,\ \tfrac{1}{2}(-n+1),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-n),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-n+1)\\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-2n),\ \tfrac{1}{2}(-\alpha-2n+1),\ -n+\tfrac{1}{2}\end{matrix};\ x^{-2}\right). \qquad (3\cdot11)$$

4. अब हम पिछले अनुभागों में प्राप्त किये गये रोड्रिग्स सूत्रों की सहायता से हाइपरज्यमितीय बहुपदियों के लिए कतिपय अवकलन सूत्र प्राप्त करेंगे

(a) (i) ज्ञात फल [3, eqn. 3, p. 263] में

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right] = 2^{-k}(1+\alpha+\beta+n)_k \, P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x), \quad 0<k\leqslant n, \tag{4·1}$$

तथा रोड्रिग्स के सूत्र (2·6) का प्रयोग करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+k}\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)^n H_n^{(\alpha,\beta)}\left(1, 1+n, \frac{1-x}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{n(-1)^k!}{(n-k)!\,2^{2k}}(1+\alpha+\beta+n)_k \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)^{n-k} H_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}\left(1, 1+n-k, \frac{1-x}{2}\right)\right]. \tag{4·2}$$

(ii) (2·6) के दोनों ओर x के सापेक्ष n बार अवकलित करने पर हमें एक ज्ञात फल [3, eqn. 10, p. 2600] प्राप्त होगा।

(b) (i) ज्ञात फल [5, eqn. 4·8] में

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left[L_n^{(\alpha)}(x)\right] = (-1)^k \, L_{k-k}^{(\alpha+k)}(x), \; 0<k\leqslant n, \tag{4·3}$$

तथा (2·7) का उपयोग करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+k}\left[x^n \, {}_2F_2\left(\begin{matrix}-n, \; 1\\ 1+\alpha, \; 1+n\end{matrix}; x\right)\right]$$

$$= \frac{n\,!\,n\,!\,(-1)^k}{n-k\,!\;n-k\,!\;(1+\alpha)_k}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}\left[x^{n-k} \, {}_2F_2\left(\begin{matrix}-n+k, \; 1\\ 1+n-k, \; 1+\alpha+k\end{matrix}; x\right)\right]. \tag{4·4}$$

(ii) (2·7) के दोनों ओर x के सापेक्ष n बार अवकलित करने पर ज्ञात फल [3, p. 705] मिलेगा।

(c) रोड्रिग्स के सूत्र [3, eqn. 7, p. 257]

$$P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}}{2^n\; n\,!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right]$$

तथा (2·6) से हमें

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right] = 2^{2n}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)^n H_n^{(\alpha,\beta)}\left(1, 1+n, \frac{1-x}{2}\right)\right] \tag{4·5}$$

प्राप्त होगा।

5. हम रोड्रिग्स के सूत्रों का सम्प्रयोग करके कतिपय समाकलों का मान निकालेंगे :

(a) यदि समाकल $I=\int_0^1 (1-x)^n P_m^{(\gamma,\,\delta)}(1-2\lambda x)\,dx,$ **(5·1)**

$P_m^{(\gamma,\delta)}(1-2\lambda x)$ में के स्थान पर इनका रोड्रिग्स सूत्र (2·6) रखा जाय तथा खंडशः समाकलित किया जाय तो

$$I=-\int_0^1\left(\frac{d}{dx}\right)(1-x)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1}\left[x^m H_m^{(\gamma,\delta)}(1,\,1+m,\,\lambda x)\right]dx, \tag{5·2}$$

जिसमें प्रथम पद दोनों सीमाओं पर लुप्त हो जाता है।

इस क्रिया को $(m-1)$ बार दुहराने पर जिसमें $m<n$, हमें

$$I=\frac{(n-m+1)_m}{m!}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m}H_m^{(\gamma,\delta)}(1,\,1+m,\,\lambda x)dx. \tag{5·3}$$

प्राप्त होगा।

(5·3) में सार्वीकृत राइस के बहुपदी को श्रेणी में व्यक्त करने पर तथा समाकलित करने पर

$$I=\frac{1}{(n+1)}H_m^{(\gamma,\delta)}(1,\,n+2,\,\lambda). \tag{5·4}$$

(b) इसी प्रकार निम्नांकित समीकरण

$$I=\int_0^1(1-x)^n R_m(\beta,\,\gamma;\,x)\,dx \tag{5·5}$$

पर विचार करने पर $R_m(\beta,\gamma;\,x)$ को (3·5) द्वारा पुनःस्थापित करने पर और m बार खंडशः समाकलन के अनन्तर

$$I=\frac{2^m(\beta)_m\,n!}{(m+n+1)!}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}\tfrac{1}{2}(-n-m-1),\ \tfrac{1}{2}(-n-m),\ \gamma-\beta\\ \gamma,\ 1-\beta-m\end{matrix};1\right). \tag{5·6}$$

6. यदि

$$A=(-1)^n e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[e^{-x}\,x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left(\begin{matrix}\triangle(\delta,\,-n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^c\right)\right] \tag{6·1}$$

पर विचार किया जाय तो लीबनिट्ज प्रमेय की सहायता से हमें

$$A=(-1)^n e^x\sum_{r=0}^{n}C_{n,r}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-r}\left\{e^{-x}\right\}\left(\frac{d}{dx}\right)^r\left\{x^{(\delta-1)n}\,{}_{p+\delta}F_q\left(\begin{matrix}\triangle(\delta,-n),\ a_p\\ b_q\end{matrix};\mu x^c\right)\right\}. \tag{6·2}$$

प्राप्त होगा।

(6·2) में $\delta=c=1$ रख कर तथा फल [5, eqn. 2·3] का उपयोग करने पर

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[{}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n, a_p \\ b_q\end{matrix}; \mu x\right)\right]=\frac{(-n)_k(a_p)_k\mu^k}{(b_q)_k}\ {}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n+k, a_p+k \\ b_q+k\end{matrix}; \mu x\right), \quad 0<k\leqslant n,$$

हमें प्राप्त होगा

$$A=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r\,\mu^r}{r\,!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-n)_t\,(-n+t)_r\,(a_p)_t(a_p+t)_r\,\mu^t x^t}{t\,!\,(b_q)_t(b_q+t)_r}.$$

संकलन का क्रम बदलने पर

$$A=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-n)_t\,(a_p)_t\,\mu^t\,x^t}{t\,!\,(b_q)_t}\ {}_{p+2}F_q\left(\begin{matrix}-n, -n+t, a_p+t \\ b_q+t\end{matrix}; \mu\right).$$

अतः

$$(-1)^n e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[e^{-x}\ {}_{p+1}F_q\left(\begin{matrix}-n, a_p \\ b_q\end{matrix}; \mu x\right)\right] \tag{6·3}$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-n)_t\,(a_p)_t\,\mu^t\,x^t}{t\,!\,(b_q)_t}\ {}_{p+2}F_q\left(\begin{matrix}-n, -n+t, a_p+t \\ b_q+t\end{matrix}; \mu\right)$$

विशिष्ट दशाएँ

(a) (6·3) में $p=0$, $q=1$, $b_1=c$, $\mu=1$ रखने पर तथा, गॉस की प्रमेय को उपयोग में लाने से

$$L_n^{(c+n-1)}(x)=(-1)^n e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[e^{-x}\ L_n^{(c-1)}(x)\right], \tag{6·4}$$

यदि $c=1$, तो यह

$$L_n^{(n)}(x)=(-1)^n e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[e^{-x} L_n(x)\right], \tag{6·5}$$

में घटित होगा और $L_n(x)$ [3, eqn. 3, p. 204], के लिए रोड्रिग्स के सूत्र की सहायता से हमें ज्ञात फल [3, eqn. 3·4, p. 337] की प्राप्ति होगी।

(b) (6·3), में $p=2$, $q=3$, $a_1=a$, $a_2=b$, $b_1=-n$, $b_2=c$, $b_3=1+a+b-c-n$, $\mu=1$ रखने पर तथा सालसुट्ज प्रमेय का उपयोग करने पर ज्ञात फल [2, eqn. 3·6, p. 3] मिलेगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डा॰ बी॰ एम॰ भिसे तथा डा॰ एस॰ एम॰ दासगुप्ता का पथ-प्रदर्शन एवं सुविधा प्रदान करने के लिए आभारी हूँ।

निर्देश

1. खण्डेकर, पी० आर० । प्रोसी० नेश० एके० सांइस (इंडिया), 1964, 34(II), 157-62.

2. वही । Mathematics student, **34**, No. 1, जनवरी-मार्च 1965.

3. रेनविले, ई० डी० । Special Functions, प्रथम संस्करण, 1960, मैकमिलन कम्पनी लि०, न्यूयार्क ।

4. शाह, मणिलाल । प्रोसी० नेश० एके० सांइस (इंडिया), 1967, **37**, 79-96.

5. वही । इन्डियन एके० सांइस, बंगलोर में प्रकाशनार्थ स्वीकृत ।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 2, April 1970, Pages 85-94

फूरियर न्यष्टियों पर

के० सी० गुप्ता
गणित विभाग, मालवीय रीजनल इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त–नवम्बर 11, 1969]

सारांश

इस टिप्पणी में हम अत्यन्त व्यापक फूरियर न्यष्टियों तथा माइजर द्वारा प्रचारित समाकल परिवर्तों से सम्बन्धित कतिपय प्रमेयों की स्थापना करेंगे। इससे पूर्व प्राप्त कई फलों को विशिष्ट दशाओं के रूपमें प्राप्त किया गया है।

Abstract

On Fourier kernels. *By* K. C. Gupta, Department of Mathematics, Malviya Regional Engineering College, Jaipur.

In this note we establish certain theorems concerning most general Fourier kernels and integral transforms introduced by Meijer. Several results obtained earlier form special cases of our findings.

1. **विषय प्रवेश** : यह कहा जाता है कि फलन $g(x)$ तथा $h(x)$ फूरियर न्यष्टियों का युग्म बनाते यदि व्युत्क्रम समीकरण

$$f(x)=\int_0^\infty g(xy)\phi(y)\,dy \tag{1.1}$$

तथा

$$\phi(x)=\int_0^\infty h(xy)f(y)\,dy \tag{1.2}$$

युगपत सत्य हैं। इनकी न्यष्टियाँ सममितीय कहलावेंगी यदि $g(x)=h(x)$ और वे असममितीय कहलावेंगी यदि $g(x)\neq h(x)$.

यदि $G(\xi)$ तथा $H(\xi)$ क्रमशः $g(x)$ तथा $h(x)$ के मेलिन परिवर्त हों, अर्थात

$$G(\xi)=\int_0^\infty x^{\xi-1}g(x)\,dx \tag{1.3}$$

तथा

$$H(\xi)=\int_0^\infty x^{\xi-1}h(x)\,dx, \tag{1.4}$$

तो (1.1) तथा (1.2) की वैधता के लिए $G(\xi)$ तथा $H(\xi)$ को फलनात्मक सम्बन्ध [8, p. 214 (8.3.5)]

$$G(\xi)\,H(1-\xi)=1 \tag{1.5}$$

की तुष्टि करनी होगी और $g(x)$, $h(x)$ तथा $\phi(x)$ को कतिपय अभिसरण प्रतिबन्धों की।

हाल ही में केसरवानी [5, p. 357] के एक शोधपत्र से प्राचलों एवं प्रयुक्त संकेतों में थोड़ी हेरफेर करने के बाद हमें असममितीय फूरियर न्यष्टियों के रूप में निम्नांकित H-फलनों के युग्म प्राप्त होंगे ।

$$g(x)=2c\sigma x^{\sigma-1/2}H^{m,\,p}_{p+q,\,m+n}\left[c^2x^{2\sigma}\left|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p),(c_1,\gamma_1),\ldots,(c_q,\gamma_q)\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_m,\beta_m),(d_1,\delta_1),\ldots,(\alpha_n,\delta_n)\end{matrix}\right.\right] \tag{1.6}$$

$$h(x)=2c\sigma x^{\sigma-1/2}H^{n,\,q}_{p+q,\,m+n}$$

$$\times\left[c^2x^{2\sigma}\left|\begin{matrix}(1-c_1-\gamma_1,\gamma_1),\ldots,(1-c_q-\gamma_q,\gamma_q),(1-a_1-\alpha_1,\alpha_1),\ldots,(1-a_p-\alpha_p,\alpha_p)\\(1-d_1-\delta_1,\delta_1),\ldots,(1-d_n-\delta_n,\delta_n),(1-b_1-\beta_1,\beta_1),\ldots,(1-b_m-\beta_m,\beta_m)\end{matrix}\right.\right] \tag{1.7}$$

यदि x वास्तविक तथा धनात्मक हो और निम्नांकित प्रतिबन्धों की तुष्टि हो

(i) $m-q=n-p>0;$

(ii) $\sum_{j=1}^{m}(\beta_j)-\sum_{j=1}^{q}(\gamma_j)=\sum_{j=1}^{n}(\delta_j)-\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j)>0;$

(iii) $\sum_{j=1}^{m}(b_j)+\sum_{j=1}^{n}(d_j)+\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{m}(\beta_j)+\sum_{j=1}^{n}(\delta_j)\right]$

$$=n-p+\sum_{j=1}^{p}(a_j)+\sum_{j=1}^{q}(c_j)+\tfrac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{j=1}^{q}(\gamma_j)\right)$$

जहाँ H-फलन [1, p. 239] को निम्नांकित प्रकार से परिभाषित एवं निरूपित किया जाय :

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,\alpha),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\xi)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\xi)\prod_{n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j\xi)}\, x^{\xi}d\xi \tag{1.8}$$

जहाँ x शून्य के तुल्य नहीं है और रिक्त गुणनफल की व्याख्या 1 के रूपमें की जावे; p, q, n तथा m ऐसी पूर्ण संख्याएँ हैं जिनसे $\leqslant m 1 \leqslant q;\ 0 \leqslant n \leqslant p$ तुष्टि होती है, $\alpha_j(j=1, \ldots, p), \beta_j(j=1, \ldots, q)$ धनात्मक संख्याएँ हैं तथा $a_j(j=1, \ldots, p), b_j(j=1, \ldots, q)$ ऐसी सम्मिश्र संख्याएँ है कि $\Gamma(b_h-\beta_h\xi)$ $(h=1,\ldots, m)$ का एक भी पोल $\Gamma(1-a_i+\alpha_i\xi)(i=1, \ldots, n)$ के किसी भी पोल से मेल नहीं करता अर्थात्

$$\alpha_j(b_h+\nu)\neq\beta_h(a_i-\eta-1) \tag{1.9}$$

$$(\nu, \eta=0, 1, 2 \ldots, h=1, \ldots, m; i=1, \ldots, n)$$

यही नहीं, कंटूर L, $\sigma-i\infty$ से $\sigma+i\infty$ तक इस प्रकार विस्तारित है कि बिन्दु

$$\xi=\frac{b_h+\nu}{\beta_h}\ (h=1, \ldots, m, \nu=0, 1, 2, \ldots)$$

जो $\Gamma(b_h-\beta_h\xi)$ के पोल हैं वे दाईं ओर अवस्थित हैं और बिन्दु

$$\xi=\frac{a_i-\eta-1}{\alpha_i}\ (i=1, \ldots, n; \eta=0, 1, 2, \ldots)$$

जो $\Gamma(1-a_i+\alpha_i\xi)$ के पोल हैं वे के बाईं ओर अवस्थित हैं। ऐसा कंटूर (1.9) के कारण सम्भावित है। H- फलन सम्बन्धी कल्पनाओं का पालन पूरे शोध पत्र में किया जावेगा।

प्रयुक्त संकेतों की विवेचना

आगे कोई भी फलन जो चाहे शतत हो या खंडशः सतत हो और जिनके क्रम लघु x तथा दीर्घ x के लिए निम्नांकित हों

$$f(x)=O(x^{\alpha}) \text{ लघु } x \text{ के लिए}$$

$$f(x)=O(e^{ax}x^{\beta}) \text{ दीर्घ } x \text{ के लिए}$$

जहाँ α, a तथा β वास्तविक अथवा सम्मिश्र हैं, उन्हें सांकेतिक रूप से $f(x)\epsilon A(\alpha, \beta, a)$ द्वारा व्यक्त किया जावेगा और N धनात्मक पूर्ण संख्या के लिए प्रयुक्त होगा।

साथ ही $\{(a_p, \alpha_p)\}$ के द्वारा

$(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2); \ldots, (a_p, \alpha_p)$ युग्मों का अनुक्रम

$\{(1-a_p-\alpha_p, \alpha_p)\}$ से $(1-a_1-\alpha_1, \alpha_1), \ldots, (1-a_p-\alpha_p, \alpha_p)$

$\{a_p\}$ से $a_1, \ldots, a_p$

$\triangle(\mathcal{N}, a)$ से $\frac{a}{\mathcal{N}}, \frac{a+1}{\mathcal{N}}, \ldots, \frac{a+\mathcal{N}-1}{\mathcal{N}}$

$(a\pm\beta, \sigma)$ से $(a+\beta, \sigma), (a-\beta, \sigma)$

$\triangle(\mathcal{N}, a\pm\beta)$ से $\triangle(\mathcal{N}, a+\beta), \triangle(\mathcal{N}, a-\beta)$

विख्यात लैप्लास परिवर्त में माइजर द्वारा निम्नांकित सार्वीकरणों का सन्निवेश किया गया [6, 7; p. 660, 730].

$$K\{f(x);\ \nu;\ s\}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} s\int_0^\infty (sx)^{1/2}K_\nu(sx)f(x)\,dx \tag{1.10}$$

$$M\{f(x);\ k+\tfrac{1}{2},\ r;\ s\}=s\int_0^\infty (sx)^{-k-1/2}e^{-1/2sx}W_{k+1/2,r}(sx)f(x)\,dx \tag{1.11}$$

(1.10) तथा (1.11) दोनों ही लैप्लास परिवर्त में घटित हो जाते हैं

$$L\{f(x);\ s\}=s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx \tag{1.12}$$

जब वे क्रमश: $\nu=\pm\frac{1}{2}$ तथा $k=\pm r$ हैं ।

निम्नांकित फलों [3, p. 99] की आगे आवश्यकता होगी :

यदि $\sigma>0, R(s)>0$ और नीचे दिए गये प्रतिबन्ध-समूह की तुष्टि हो

(i) $\lambda=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j)-\sum_{j=n+1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{j=1}^{m}(\beta_j)-\sum_{m+1}^{q}(\beta_j)>0,\ \ |\arg z|<\frac{1}{2}\lambda\pi;$

(ii) $\lambda=0$, z वास्तविक एवं धनात्मक है तथा

$$R\left\{\sum_{j=1}^{q}(b_j)-\sum_{j=1}^{p}(a_j)+\tfrac{1}{2}(p-q)\right\}<0,$$

तो (*a*)

$$K\left\{x^l H_{p,q}^{m,n}\left[zx^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right];\ \nu;\ s\right\}$$

$$=2^l\pi^{-1/2}s^{-l}H_{p+2,q}^{m,n+2}\left[z\left(\frac{2}{s}\right)^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}l\pm\frac{1}{2}\nu,\ \frac{1}{2}\sigma), \{(a_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right] \tag{1.13}$$

जहाँ $\left\{l \quad \pm\nu+\sigma\left(\frac{b_h}{\beta_h}\right)\right\}>0 \ (h=1, \ldots, m).$

(b) $$M\left\{x^l H_{p,q}^{m,n}\left[zx^\sigma \left|\begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]; k+\tfrac{1}{2}, r; s\right\}$$

$$=s^{-l} H_{p+2, q+1}^{m, n+2}\left[zs^{-\sigma}\left|\begin{matrix}(k-l\pm r, \sigma), \{(a_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_q, \beta_q)\}, (2k-l, \sigma)\end{matrix}\right.\right]$$

जहाँ $$R\left(l-k\pm r+1+\sigma\frac{b_h}{\beta_h}\right)>0 \ (h=1, \ldots, m) \tag{1.14}$$

2. **प्रमेय 1.** यदि $g(x)$, $h(x)$ असममित फूरियर न्यष्टियाँ हों जिनका विशेष उल्लेख (1.6) तथा (1.7) में हो $\sigma>0$, $c>0$, $f(x)\epsilon A(\alpha, \alpha', a)$, $R(s)>\max\{k(a)\}0$, $\phi(x)g(\eta x)\epsilon L(0,\infty)(\eta>0)$

और $$\phi(y)=2c\sigma y^{\sigma-1/2}\int_0^\infty x^{\sigma-1/2}f(x)$$

$$\times H_{p+q, m+n}^{n,q}\left[c^2(xy)^{2\sigma}\left|\begin{matrix}\{(1-c_q-\gamma_q, \gamma_q)\}, \{(1-a_p-\alpha_p, \alpha_p)\}\\ \{(1-d_n-\delta_n, \delta_n)\}, \{(1-b_m-\beta_m, \beta_m)\}\end{matrix}\right.\right]dx \tag{2.1}$$

तो हमें

(i) $$K\{x^lf(x); \mu; s\}=\pi^{-1/2}c\sigma 2^{l+\sigma+1/2}s^{1/2-l-\sigma}$$

$$\times\int_0^\infty y^{\sigma-1/2}\phi(y)H_{p+q+2, m+n}^{m, p+2}\left[c^2\left(\frac{2y}{s}\right)^{2\sigma}\left|\begin{matrix}\{1-\sigma-l\pm\mu(2, \sigma)\}, \{(a_p, \alpha_p)\}, \{(c_q, \gamma_q)\}\\ \{(b_m, \beta_m)\}, \{(d_n, \delta_n)\}\end{matrix}\right.\right]dy \tag{2.2}$$

प्राप्त होगा जहाँ

$$R(\alpha+l+\tfrac{3}{2}\pm\mu)>0 \text{ तथा } R\left(\sigma+l+1\pm\mu+2\sigma\frac{b_h}{\beta_h}\right)>0 \quad (h=1, \ldots, m)$$

(ii) $$M\{x^lf(x); k+\tfrac{1}{2}; r, s\}=2c\sigma s^{1/2-l-\sigma}$$

$$\times\int_0^\infty y^{\sigma-1/2}\phi(y)H_{p+q+2, m+n+1}^{m, p+2}\left[c^2\left(\frac{y}{s}\right)^{2\sigma}\left|\begin{matrix}(\tfrac{1}{2}+k-l-\sigma\pm r, 2\sigma), \{(a_p, \alpha_p)\}, \{(c_q, \gamma_q)\}\\ \{(b_m, \beta_m)\}, \{(d_n, \delta_n)\}, (\tfrac{1}{2}+2k-l-\sigma, 2\sigma)\end{matrix}\right.\right]dy \tag{2.3}$$

जहाँ $R(\alpha+l-k\pm r+1)>0$ तथा $R\left(\sigma+l-k+\tfrac{1}{2}\pm r+2\sigma\frac{b_h}{\beta_h}\right)>0 \ (h=1, \ldots, m)$

उपपत्ति: (1.10) से

$$K\{x^lf(x); \mu; s\}=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}s\int_0^\infty (sx)^{1/2}x^lf(x)K_\mu(sx)\,dx, \tag{2.4}$$

किन्तु (1.1) से

$$f(x)=\int_0^\infty g(xy)\phi(y)\,dy; \tag{2.5}$$

प्राप्त होता है अतः (2.4) में (2.5) से $f(x)$ का मान रखने पर हमें

$$K\{x^l f(x);\,\mu;\,s\}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,s^{3/2}\int_0 x^{l+1/2}K_\mu(sx)\left[\int_0^\infty g(xy)\phi(y)\,dy\right]dx \tag{2.6}$$

प्राप्त होता है।

(2.6) में दाहिनी ओर $g(xy)$ का मान (1.6) की सहायता से रखने पर तथा उसमें समाकलन के क्रम को उलट देने पर

$$K\{x^l f(x);\,\mu;\,s\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,s^{3/2}\int_0^\infty \phi(y)\left(2c\sigma\int_0^\infty x^{l+1/2}K_\mu(sx)\right.$$
$$\left.\times(xy)^{\sigma-1/2}H_{p+q,\,m+n}^{m,\,p}\left[c^2(xy)^{2\sigma}\left|\begin{matrix}\{(a_p,\,\alpha_p)\},\{(c_q,\,\gamma_q)\}\\ \{(b_m,\,\beta_m)\},\,\{(d_n,\,\delta_n)\}\end{matrix}\right.\right]dx\right)dy \tag{2.7}$$

(1.13) की सहायता से (2.7) का आन्तरिक समाकल निकालने पर हमें (2.2) की प्राप्ति होती है।

(2.6) में समाकलन-क्रम के व्युत्क्रमण को न्यायसंगत होने के लिए हम देखते हैं कि वहाँ पर x-समाकल परम अभिसारी है क्योंकि

$$R\left(l+\sigma+1\pm\mu+2\sigma\,\frac{b_h}{\beta_h}\right)>0\ (h=1,\,\ldots,\,m)$$

$R(s)>0,\ c>0,\ \sigma>0$; और y-समाकल परम अभिसारी है क्योंकि $\phi(x)g(\eta x)\epsilon L(0,\,\infty)[\eta>0]$

अन्ततः हम देखते हैं कि (2.6) में दाईं ओर के पुनरावृत्त समाकलों में से एक अभिसारी है क्योंकि $R(s)>R(a)$ तथा $R(l\pm\mu+\frac{3}{2}+a)>0$ अतः द ला वैली पूसिन के प्रमेय (2.2) के अनुसार समाकलन-क्रम का व्युत्क्रमण न्यायसंगत है। इससे (2.2) की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

(ii) इसको (1.14) का सम्प्रयोग करते हुये ऊपर दी गई विधि से सिद्ध किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

(1.6) तथा (1.7) में सभी α, β, γ तथा δ' को इकाई के बराबर रखने पर तथा $\sigma=N$ रखने पर हमें केसरवानी [4, p. 271] द्वारा दिये गये असंमितीय फूरियर न्यष्टियों के युग्म प्राप्त होंगे।

$$g(x)=2cNx^{N-1/2}G^{m,\,p}_{p+q,\,m+n}\left[c^2x^{2N}\left|\begin{matrix}a_1,\,\ldots,\,a_p,\,c_1,\,\ldots,\,c_q\\ b_1,\,\ldots,\,b_m,\,d_1,\,\ldots,\,d_n\end{matrix}\right.\right] \tag{3.1}$$

$$h(x)=2cNx^{N-1/2}G^{n,\,q}_{p+q,\,m+n}\left[c^2x^{2N}\left|\begin{matrix}-c_1,\,\ldots,\,-c_q,\,-a_1,\,\ldots,\,-a_p\\ -d_1,\,\ldots,\,-d_n,\,-b_1,\,\ldots,\,-b_m\end{matrix}\right.\right] \tag{3.2}$$

जहाँ $c>0$ और निम्नांकित प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं :

(i) $n-p=m-q>0;$

(ii) $\sum\limits_{j=1}^{p}(a_j)+\sum\limits_{j=1}^{q}(c_j)=\sum\limits_{j=1}^{m}(b_j)+\sum\limits_{j=1}^{n}(d_j)$

यदि हम प्रमेय 1 में उपर्युक्त प्रतिस्थापन करें तो यह निम्नांकित रूप धारण कर लेगी :

प्रमेय 2. यदि $g(x)$, $h(x)$ असममित न्यष्टियाँ हों जिनका उल्लेख क्रमश (3.1) तथा (3.2) में हो चुका है तो $f(x)\epsilon A(\alpha, \alpha', a)$ $c>0$, $R(s)>max\{R(a), 0\}$,

$$\phi(y)=2cNy^{N-1/2}\int_0^\infty f(x)^{N-1}\Gamma^2\,G^{n,\,q}_{p+q,\,m+n}\left[c^2(xy)^{2N}\left|\begin{matrix}-c_1,\ldots,\,-c_q,\,-a_1,\ldots\,-a_p\\ -d_1,\ldots,\,-d_n,\,-b_1,\ldots,\,-b_m\end{matrix}\right.\right]dx$$

तथा $\phi(x)g(\eta x)\epsilon L(0,\infty)\{\eta>0\}$,

तो (i) $K\{x^lf(x);\,\mu;\,s\}=e(2\pi)^{1/2-N}(2N)^{l+N+1}$

$$\times s^{1/2-l-N}\int_0^\infty y^{N-1/2}\phi(y)\,G^{m,\,p+2N}_{p+2N+q,\,m+n}\left[c^2\left(\frac{2yN}{s}\right)^{2N}\left|\begin{matrix}\triangle(N,1\pm\mu-N-l)/2,\,\{a_p\},\,\{c_q\}\\ \{b_m\},\,\{d_n\}\end{matrix}\right.\right]dy \tag{3.3}$$

जहाँ $R(a+l\pm\mu+\frac{3}{2})>0,\; R(l+N\pm\mu+2Nb_h+1)>0\;(h=1,\ldots,m)$

(ii) $M\{x^lf(x),\,\kappa+\frac{1}{2},\,r;\,s\}=c(2N)^{l+N+1}(2\pi)^{1/2-N}s^{1/2-l-N}$

$$\times\int_0^\infty y^{N-1/2}\phi(y)G^{m,\,p+4N}_{p+q+4N,\,m+n+2N}$$

$$\times\left[c^2\left(\frac{2yN}{s}\right)^{2N}\left|\begin{matrix}\triangle(2N,\,\frac{1}{2}+k-N-l\pm r),\{a_p,\,\{c_q\}\\ \{b_m\},\,\{d_n\},\,\triangle(2N,\,2k-N-l+\frac{1}{2})\end{matrix}\right.\right]dy \tag{3.4}$$

जहाँ $R(-k-l\pm r+a+1)>0,\; R(N+l-k\pm r+\frac{1}{2}+2Nb_h)>0\;(h=1,\ldots,m).$

(iii) $L\{xlf(x);\,s\}=s^{1/2-N-l}c(2N)^{l+N+1}(2\pi)^{1/2-N}\int_0^\infty\phi(y)$

$$\times y^{N-1/2}\,G^{m,\,p+2N}_{p+q+2N,\,m+n}\left[c^2\left(\frac{2yN}{s}\right)^{2N}\left|\begin{matrix}\triangle(2N,\,\frac{1}{2}-N-l),\,\{a_p\},\,\{y_q\}\\ \{b_m\},\,\{d_n\}\end{matrix}\right.\right]dy \tag{3.5}$$

जहाँ $R(a+l+1)>0$ तथा $R(N+l+\frac{1}{2}+2Nb_h)>0$ $(h=1, \ldots, m)$.

(iii) को सिद्ध करते के लिए हम (ii) में $K=\pm r$ रखेंगे।

(3.1) तथा (3.2) में प्राचलों को उपयुक्त मान प्रदान करने पर हमें इसके पूर्व कई लेखकों द्वारा प्राप्त अनेक फलों की उपलब्धि होती है किन्तु स्थानाभाव के कारण यहाँ हम केवल एक को इंगित करेंगे। यदि हम (3.1) तथा (3.2) में $m=p=1$, $q=0$, $n=2$, $N=1$, $c=\frac{1}{2}$, $a_1=b_1=\frac{\nu+1}{2}$, $d_1=\frac{\nu}{2}$ तथा $d_2=-\frac{\nu}{2}$ रखें तो हमें टिचमार्श की असंमित फूरियर न्यष्टियाँ प्राप्त होंगी और यह प्रमेय इसके पूर्व वर्मा द्वारा प्राप्त फल [10, p. 270] में घटित हो जावेगी।

4. सममित फूरियर न्यष्टियाँ

यदि हम (1.6) तथा (1.7) में निम्नांकित प्रतिस्थापन करें :

$$q=p,\ a_j=\gamma_j,\ c_j=1-a_j-a_j(j=1, \ldots, p) \text{ तथा } n=m,\ \beta_i=\delta_i,\ d_i=1-b_i-\beta_i \quad (i=1, \ldots, m)$$

तो हमें फाक्स द्वारा दी गई [2, p. 408] निम्नाँकित सममित फूरियर न्यष्टि प्राप्त होगी

$$g(x)=h(x)$$

$$=2c\sigma x^{\sigma-1/2}H_{2p,\ 2m}^{m,\ p}\left[c^2x^{2\alpha}\left|\begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}, \{(1-a_p-\alpha_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_m, \beta_m)\}, \{(1-b_m-\beta_m, \beta_m)\}\end{matrix}\right.\right] \tag{4.1}$$

जहाँ $c>0$, $\sigma>0$ तथा $\sum_{j=1}^{m}(\beta_j)-\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j)>0$.

पुनः यदि हम प्रमेय 1 में उपर्युक्त प्रतिस्थापन करें तो वह निम्नांकित रूप में घटित हो जाती है :

प्रमेय 3.

यदि सममित फूरियर न्यष्टि को (4.1) द्वारा व्यक्त करें

$$\sigma>0,\quad c>0,\ f(x)\epsilon A(a, \alpha', a),\quad R(s)>max\{R(a), 0\},$$

$$\phi(y)=2c\sigma y^{\sigma-1/2}\int_0^\infty x^{\sigma-1/2}f(x)$$

$$\times H_{2p,\ 2m}^{m,p}\left[c^2(xy)^{2\sigma}\left|\begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\}, \{(1-a_p-\alpha_p, \alpha_p)\}\\ \{(b_m, \beta_m)\}, \{(1-b_m-\beta_m, \beta_m)\}\end{matrix}\right.\right]dx \tag{4.2}$$

तथा $\phi(x(g(\eta x)\epsilon L(0, \infty)(\eta>0)$,

तो (i)

$$K\{x^l f(x);\ \mu;\ s\}=c\sigma\pi^{-1/2}\,2^{l+\sigma+1/2}s^{1/2-l-\sigma}$$

$$\times\int_0^\infty y^{\sigma-1/2}\phi(y)H^{m,\ p+2}_{2p+2,\ 2m}\left[c^2\left(\frac{2y}{s}\right)^{2\sigma}\middle|\begin{matrix}(1-\sigma-l\pm\mu)/2,\ \sigma),\ \{(a_p,\ \alpha_p)\},\ \{(1-a_p-\alpha_p,\ \alpha_p)\}\\ \{(b_m,\ \beta_m)\},\ \{(1-b_m-\beta_m,\ \beta_m)\}\end{matrix}\right]dy \tag{4.3}$$

जहाँ $R(a+l\pm\mu+\frac{3}{2})>0,\ R\left(l+\sigma+1\pm\mu+2\sigma\frac{b_h}{\beta_h}\right)>0\ (h=1,\ \ldots,\ m).$

(ii) $M\{x^l f(x);\ k+\frac{1}{2},\ r;\ s\}$

$$=2c\sigma s^{1/2-l-\sigma}\int_0^\infty y^{\sigma-1/2}\phi(y)$$

$$\times H^{m,\ p+2}_{2p+2,\ 2m+1}\left[c^2\left(\frac{y}{s}\right)^{2\sigma}\middle|\begin{matrix}(\frac{1}{2}+k-l-\sigma\pm r,\ 2\sigma),\ \{(a_p,\ \alpha_p)\},\ \{(1-a_p-\alpha_p,\ \alpha_p)\}\\ \{(b_m,\ \beta_m)\},\ \{(1-b_m-\beta_m,\ \beta_m)\},\ (\frac{1}{2}+2k-\sigma-l,\ 2\sigma)\end{matrix}\right]dy \tag{4.4}$$

जहाँ $R(a+l\pm r-k+1)>0,\ R\left(\sigma+l-k+\frac{1}{2}\pm r+2\sigma\frac{b_h}{\beta_h}\right)>0\ (h=1,\ \ldots,\ m)$

$L\{x^l f(x);\ s\}$ के मान को (ii) से उसमें $k=+r$ रख कर प्राप्त किया जा सकता है।

(4.1) में $\alpha_j=\beta_j=1\,(j=1,\ldots,p;\ i=1,\ \ldots,\ m)$ तथा $\sigma=N$ रखने पर यह फाक्स [2, p. 40] द्वारा दिये गये निम्नांकित सरलतर सममित फूरियर श्रष्टि में घटित हो जाता है :—

$$g(x)=h(x)=2cNx^{N-1/2}G^{m,\ p}_{2p,\ 2m}\left[c^2x^{2N}\middle|\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p,\ -a_1,\ \ldots,\ -a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_m,\ -b_1,\ \ldots,\ -b_m\end{matrix}\right] \tag{4.5}$$

यदि $c>0$, x वास्तविक एवं धनात्मक हो,

$$m-p>0,\ R(\tfrac{1}{2}-a_j)>0\ (j=1,\ \ldots,\ p)\ \text{तथा}\ R(\tfrac{1}{2}+b_i)>0\ (i=1,\ \ldots,\ m).$$

यही नहीं, उपर्युक्त प्रतिस्थापन प्रमेय 3 को निम्नांकित रोचक रूप में घटित कर देते हैं :

प्रमेय 4.

यदि सममित फूरियर न्यष्टि को $g(x)=h(x)$ द्वारा व्यक्त करें

$$f(x)\epsilon A(a,\ a',\ a),\ R(s)>max\{R(a),\ 0\}$$

$$\phi(y)=2cNy^{N-1/2}\int_0^\infty x^{N-1/2}f(x)$$

$$\times G^{m,\ p}_{2p,\ 2m}\left[c^2(xy)^{2N}\middle|\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p,-a_1,\ \ldots,\ -a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_m,\ -b_1,\ \ldots,\ -b_m\end{matrix}\right]dx, \tag{4.6}$$

तथा $\phi(x)g(\eta x)\epsilon L(0,\ \infty)\,(\eta>0)$,

तो (i) $K\{x^l f(x);\ \mu;\ s\}$

$$=c(2N)^{l+N+1}s^{1/2-l-N}\,(2\pi)^{1/2-N}\int_0^\infty y^{N-1/2}\phi(y)$$

$$\times G^{m,\ p+2N}_{2p+2N,\ 2m}\left[c^2\left(\frac{2yN}{s}\right)^{2N}\middle|\begin{matrix}\triangle(N,\ (1-lN\pm\mu)/2),\ a_1,\ \ldots,\ a_p,\ -a_1,\ \ldots,\ -a_p\\ b_1,\ \ldots\ b_m,\ -b_1,\ \ldots,\ -b_m\end{matrix}\right]dy \tag{4.7}$$

जहाँ $R(\alpha+l\pm\mu+\frac{3}{2})>0,\ R(l+N+1\pm\mu+2Nb_h)>0\ (h=1,\ ...,\ m)$,

$$\text{(ii)}\quad M\{x^l f(x);\ k+\tfrac{1}{2},\ r;\ s\}=c(2\pi)^{1/2-N}(2N)^{l+N+1}s^{1/2-l-N}\int_0^\infty y^{N-1/2}\phi(y)$$

$$\times G^{m,\ p+4N}_{2p+4N,\ 2m+2N}\left[c^2\left(\frac{2yN}{s}\right)^{2N}\middle|\begin{matrix}\triangle(2N,\ \frac{1}{2}+k-l-N\pm r),\ a_1,\ ...,\ a_p,\ -a_1,\ ...,\ -a_p\\ b_1,\ ...,\ b_m,\ -b_1,\ ...\ b_m,\ \triangle(2N,\ 2k-l-N+\frac{1}{2})\end{matrix}\right]dy \tag{4.8}$$

जहाँ $R(\alpha+l-k\pm r+1)>0$ तथा $R(l-k+\frac{1}{2}+N\pm r+2Nb_h)>0\ (h=1,\ ...,\ m)$

$L\{x^l f(x);\ s\}$ के मान को इसमें (ii) में $k=\pm r$ रखकर प्राप्त किया जा सकता है।

अन्त में हम प्रमेय की एक विशिष्ट दशा की ओर संकेत मात्र करना चाहेंगे यद्यपि ऐसी कई विशिष्ट दशायें उद्धृत की जा सकती हैं।

प्रमेय 4 में $N=1,\ m=1,\ p=0,\ c=\frac{1}{2}$ तथा $b_1=\frac{1}{2}\nu$ रखने पर हमें अन्य फल प्राप्त होगा जो वर्मा [9. p. 103] द्वारा दिया जा चुका है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र की तैयारी में डा० के० सी० शर्मा ने जो रुचि दिखलाई है उसके लिये लेखक उनका आभारी है।

निर्देश

1. ब्राक्सा, बी० एल० जे०। **कम्पोस० मैथ०**, 1963, **15**, 239-341.
2. फाक्स, सी०। **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.
3. गुप्ता, के० सी०। Annales de la Societe' Scientifique de Bruxelles, 1965, **78**, 97-106.
4. केसरवानी, आर०। **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1963, **14**, 271-277.
5. वही। **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०** 1965, **115**, 356-369.
6. माइजर, सी० एस०। Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch., 1940, **43**, 591-608.
7. वही। **वही**, 1941, **44**, 727-737.
8. टिचमार्श, ई० सी०। Theory of Fourier Integrals, **आक्सफोर्ड** 1937.
9. वर्मा, सी० बी० एल०। **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1961, **30** A, 102-107.
10. वही। **वही** 1963, **33** A, 267-274.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No 2, April 1970, Pages 95-100

दो चरों वाले सार्वीकृत फलन सम्बन्धी एक अनन्त समाकल

एस० एल० बोरा

गणित विभाग, एस० के० गवर्नमेंट कालेज, सीकर, राजस्थान

[प्राप्त--अक्टूबर 2, 1969]

सारांश

इस शोध पत्र में हाल ही में कल्ला द्वारा दिए गए प्रमेय की सहायता से दो चरों वाले सार्वीकृत फलन सम्बन्धी एक अनन्त समाकल का मान ज्ञात किया गया है। इस फलन के तर्क में $\left(\frac{a+bt+ct^2}{t}\right)$ आया है जिसमें t समाकलन का एक चर है। कतिपय रोचक विशिष्ट दशाओं का भी उल्लेख किया गया है।

Abstract

An infinite integral involving generalised function of two variables. *By* S. L. Bora, Department of Mathematics, S. K. Govt. College, Sikar, Rajasthan.

In this paper an infinite integral involving generalised function of two variables introduced by Munot and Kalla has been evaluated with the help of a theorem recently given by Kalla. The argument of the function contains $\frac{(a+bt+ct^2)}{t}$, where t is the variable of integration. A few interesting particular cases have also been mentioned.

1. मुनाट तथा कल्ला[6] द्वारा पारिभाषित एवं प्रदर्शित दो चरों वाला सार्वीकृत फलन इस प्रकार है:

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} m_1, 0 \\ p_1-m_1, q_1 \end{bmatrix} & (a_{p1}, A_{p1}); (b_{q1}, B_{q1}) & \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2-m_2, q_2-n_2 \end{pmatrix} & (c_{p2}, C_{p2}); (d_{q2}, D_{q2}) & x, y \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3-m_3, q_3-n_3 \end{pmatrix} & (e_{p3}, E_{p3}); (f_{q3}, F_{q3}) & \end{array}\right] \tag{1.1}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \int_{L_2} F(\xi+\eta) \phi(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

जहाँ बांई ओर संकेत (ap, A_p) p कोटि वाले युग्मों के लिये आया है $(a_p, A_p); \ldots, (a_1, A_1)$ जिनके दाई ओर L_1 तथा L_2 दो उपयुक्त कंटूर हैं और

$$F(\xi+\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+A_j\xi+A_j\eta)}{\prod_{j=m_1+1}^{p_1}\Gamma(1-a-A\xi-A\eta)\prod_{j=1}^{q_1}(b_j+B_j\xi+B_j\eta)},$$

$$\phi(\xi,\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{m2}\Gamma(1-c_j+C_j\xi)\prod_{j=1}^{n2}\Gamma(d_j-D_j\xi)\prod_{j=1}^{m3}\Gamma(1-e_j+E_j\eta)\prod_{j=1}^{n3}\Gamma(f_j-F_j\eta)\,x^\xi y^\eta}{\prod_{j=m_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-C_j\xi)\prod_{j=n_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+D_j\xi)\prod_{j=m_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_j\eta)\prod_{j=n_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_j\eta)}$$

यदि $p_1\geqslant m\geqslant 0$, $p_2\geqslant m_2\geqslant 0$, $p_3\geqslant m_3\geqslant 0$, $q_1\geqslant 0$, $q_2\geqslant n_2\geqslant 0$, $q_3\geqslant n_3\geqslant 0$, $q_1+q_2\geqslant p_1+p_2$ और सभी p, n तथा m अनृण पूर्ण संख्याएँ हैं।

सर्वसम्मत लैप्लास परिवर्त

$$h(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\;dt,\quad R(p)>0 \tag{1.2}$$

को निम्नांकित प्रकार से प्रदर्शित किया जावेगा

$$L\{f(t);\,p\}=h(p)$$

कल्ला[4] ने एक प्रमेय सिद्ध किया है जिसके अनुसार

यदि $$L\{f(t);\,p\}=h(p)$$

तथा $$L\{t^{-1/2}f(t);\,p\}=g(p)$$

तो $$\int_0^\infty t^{1/2}(a+bt+ct^2)^{-1}h\left(\frac{a+bt+ct^2)}{t}\right)dt=(b+2\sqrt{ac})g(b+2\sqrt{ac}) \tag{1.3}$$

नीचे दिये गये प्रतिबन्ध समूह के लिए न्यायसंगत हैं

(A) $R(a)\geqslant 0,\ c>0.$

(B) $R(\xi+\frac{1}{2})>0$, जहाँ $f(t)=0\ (t\xi)$ लघु 't' के लिए

(C) (i) यदि $r<1$; तो $R(b+2\sqrt{ac})>0$

(ii) यदि $r=1$; तो $R(\beta)<0$ जब $R(b+2\sqrt{ac})=R(\beta)$

तथा $R(\eta+\frac{1}{2})<0$ जब $R(b+2\sqrt{ac})=R(\beta)$

(iii) यदि $r>;1$ तो $R(B)<0$,

जहाँ $f(t)=0(t^{\eta}e^{\beta tr})$ दीर्घ 't' के लिए।

2. **समाकल** :— यहाँ जिस समाकल को सिद्ध करना है वह है :

$$\int_0^{\infty} t^{\lambda+1/2}(a+bt+ct)^{2-\lambda-1}$$

$$\times H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} o,\ o \\ p_1,\ q_1 \end{bmatrix} & (a_{p_1}, A_p);\ (b_{q_1}, B_{q_1}) & \\ \begin{pmatrix} m_2+1,\ n_2 \\ p_2-m_2, q_2-n_2 \end{pmatrix} & (c_{p_2}, C_{p_2}),\ (-\lambda, h);\ (d_{q_2}, D_{q_2}) & \dfrac{at^h}{(a+bt+ct^2)}\ n, \\ \begin{pmatrix} m_3,\ n_3 \\ p_3-m_3,\ q_3-n_3 \end{pmatrix} & (e_{p_3}, E_{p_3});\ (f_{q_3}, F_{q_3}) & \beta \end{array}\right] dt \tag{2.1}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{c}}\,(b+2\sqrt{ac})^{-\lambda-1/2}$$

$$\times H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} o,\ o \\ p_1,\ q_1 \end{bmatrix} & (a_{p_1}, A_{p_1});\ (b_{q_1}, B_{q_1}) & \\ \begin{pmatrix} m_2+1,\ n_2 \\ p_2-m_2,\ q_2-n_2 \end{pmatrix} & (c_{p_2}, C_{p_2});\ (d_{q_2}, D_{q_2}) & \dfrac{a}{(b+2\sqrt{ac})^h},\ \beta \\ \begin{pmatrix} m_3,\ n_3 \\ p_3-m_3,\ q_3-n_3 \end{pmatrix} & (e_{p_3}, E_{p_3});\ (f_{q_3}, F_{q_3}) & \end{array}\right]$$

यदि $R(a)\geqslant 0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ c\geqslant 0,\ R(\lambda-\frac{1}{2})>0,\ R\left(h\frac{d_j}{D_j}+\lambda+\frac{3}{2}\right)>0,$

$p_1\geqslant 0,\ p_2\geqslant m_2\geqslant 0,\ p_3\geqslant m_3\geqslant 0,\ q_1\geqslant 0,\ q_2\geqslant n_2\geqslant 0,\ q_3\geqslant n_3\geqslant 0,$

$q_1+q_2\geqslant p_1+p_2,\ q_1+q_3\geqslant p_1+p_3,\ \sum_{j=1}^{p_1} A_j+\sum_{j=1}^{p_2} C_j-\sum_{j=1}^{q_1} B_j-\sum_{j=1}^{q_2} D_j<0,$

$\sum_{j=1}^{p_1} A_j+\sum_{j=1}^{p_3} E_j-\sum_{j=1}^{q_1} B_j-\sum_{j=1}^{q_3} F_j<0;\ R\left(h\frac{d_j}{D_j}+\lambda+\frac{3}{2}\right)>0,\ (j=1, 2, \ldots, n_2).$

$$|\arg \alpha| < \left(-\sum_{j=1}^{p_1} A_j - \sum_{j=1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_2} C_j - \sum_{j=m_2+1}^{p_2} C_j + \sum_{j=1}^{n_2} D_j - \sum_{j=n_2+1}^{q_2} D_j\right)\frac{\pi}{2}$$

तथा

$$|\arg \beta| < \left(-\sum_{j=1}^{p_1} A_j - \sum_{j=1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_3} E_j - \sum_{j=m_3+1}^{p_3} E_j + \sum_{j=1}^{n_3} F_j - \sum_{j=n_3+1}^{q_3} F_j\right)\frac{\pi}{2}.$$

उपपत्ति : यदि हम

$$f(t) = t^{\lambda} H \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} o, o \\ p_2, q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2-m_2, q_2-n_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3-m_3, q_3-n_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_{p_1}, A_{p_1}); (b_{q_1}, B_{q_1}) \\ (c_{p_2}, C_{p_2}); (d_{q_2}, D_{q_2}) \\ (e_{p_3}, E_{p_3}); (f_{q_3}, F_{q_3}) \end{matrix} \right| \alpha t^h, \beta \right]$$

लें तो (1.2) से हमें

$$L\{f(t); p\} = \tag{2.2}$$

$$= p\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\lambda} H \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} o, o \\ p_1, q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2-m_2, q_2-n_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3-m_3, q_3-n_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_{p_1}, A_{p_1}); (b_{q_1}, B_{q_1}) \\ (c_{p_2}, C_{p_2}), (d_{q_2}, D_{q_2}) \\ (e_{p_3}, E_{p_3}), (f_{q_3}, F_{q_3}) \end{matrix} \right| \alpha t^h, \beta \right] dt,$$

प्राप्त होगा और समाकल्य में दो चरों वाले सार्वीकृत फलन को व्यक्त करने पर, समाकल के क्रम को बदलने पर (जो [1] से सम्भव है) आन्तरिक समाकल[2] का मान निकालने पर और (1.1) के द्वारा फल की विवेचना करने पर हमें

$$= \frac{1}{p^{\lambda}} H \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} o, o \\ p_1, q_1 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2+ \quad ^2 \\ p_2-m_2, !\; _2-n_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3-m_3, q_3-n_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_{p_1}, A_{p_1}); (b_{q_1}, B_{q_1}) \\ (c_{p_2}, C_{p_2}), (-\lambda, h); (d_{q_2}, D_{q_2}) \\ (e_{p_3}, E_{p_3}); (f_{q_3}, F_{q_3}) \end{matrix} \right| \frac{\alpha}{p^h}, \beta \right]$$

$$= h(p)$$

प्राप्त होगा यदि $R(p)>0$, $p_1 \geqslant 0, q_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant m_2 \geqslant 0$, $p_3 \geqslant m_3 \geqslant 0$, $q_2 \geqslant n_2 \geqslant 0$, $q_3 \geqslant n \geqslant 0$, $q_1+q_2 \geqslant p_1+p_2$, $q_1+q_3 \geqslant p_1+p_3$.

इसी प्रकार हम $g(p)$ का मान प्राप्त करेंगे और उसे (1.3) मे प्रतिस्थापित करने पर हमें फल (2.1) की प्राप्ति होगी

विशिष्ट दशाएँ

(i) यदि $A_{p1}=B_{q1}=C_{p2}=D_{q2}=E_{p3}=F_{q3}=1$, तो गामा फलन[3] के लिए गुणनफल सूत्र प्रयुक्त करने पर हमें एक फल प्राप्त होगा जो शर्मा[7] द्वारा पारिभाषित दो चरों वाला सार्वीकृत फलन है। प्राप्त फल निम्नांकित प्रकार है :

$$\int_0^\infty t^{\lambda+1/2}(a+bt+ct^2)^{-\lambda-1}$$

$$\times S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}o, o\\ p_4, q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2+h, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_1, \ldots, a_{p1}; b_1, \ldots, b_{q1}\\ c_1, \ldots, c_{p_2}, \triangle(-\lambda, h); d_1, \ldots, d_{q_2}\\ e_1, \ldots, e_{p_3}; f_1, \ldots, f_{q_3}\end{matrix}\right| \alpha\left(\frac{ht}{a+bt+ct^2}\right)^h, \beta\right] dt$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{hc}}\,(b+2\sqrt{ac})^{-\lambda-1/2}$$

$$\times S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}o, o\\ p_1, q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2+h, n_2\\ p_2-m_2, q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3-m_3, q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_1, \ldots, a_{p1}; b_1, \ldots, b_{q1}\\ c_1, \ldots, c_{p2}; \triangle(\frac{1}{2}-\lambda, h); d_1, \ldots, d_{q_2}\\ e_1, \ldots, e_{p_3}; f_1, \ldots, f_{q_3}\end{matrix}\right| \alpha\left(\frac{h}{b+2\sqrt{ac}}\right)^h, \beta\right] \tag{2.3}$$

यदि $R(a)\geqslant 0,\ R(b+2\sqrt{ac})>0,\ c\geqslant 0,\ R(\lambda-\frac{1}{2})>0,\ p_1+p_2+q_1+q_2<2(m_2+n_2),$
$(p_1+p_3+q_1+q_3)<2(m_3+n_3),\ m_2\geqslant 1,\ m_3\geqslant 1,\ R(hd_j+\lambda+\frac{3}{2})>0,\ (j=1, 2, \ldots n_2)$

तथा $|\arg\alpha|<(m_2+n_2-\frac{1}{2}p_1-\frac{1}{2}q_1-\frac{1}{2}p_2-\frac{1}{2}q_2)\pi$
$|\arg\beta|<(m_3+n_3-\frac{1}{2}p_1-\frac{1}{2}q_1-\frac{1}{2}p_3-\frac{1}{2}q_3)\pi,$

जहाँ $\triangle(\lambda, h)=\frac{\lambda}{h}, \frac{1+\lambda}{h}, \ldots, \frac{h-1+\lambda}{h}.$

अब यदि हम $p_1=q_1=0$ रखें तो (2.1) कल्ला[5] द्वारा दिए गए ज्ञात फल में घटित हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० के० सक्सेना का उदार पथ-प्रदर्शन के लिए आभारी है।

निर्देश

1. ब्रामविच, टी० जे० आई० ए०। An Introdution to the Theory of Infinite Series, **मैकमिलन, लन्दन**, 1955.

2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि। Tables of Integral Transforms, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क, भाग** II, 1954.

3. वही। Higher Transcendental Functions, **भाग 1, मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1953.

4. कल्ला, एस० एल०। **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)** 167, **37** (A), 195-200.

5. वही। **पी० एचडी० शोध प्रबन्ध, राजस्थान विश्वविद्यालय**, 1968.

6. मुनाट, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०। **(प्रकाशनाधीन)**

7. शर्मा, बी० एल०। nnales de la Societe Scientifique de Bruxelles, 1995, **T. 79 I**: 26-40.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 2, April 1970, Pages 101-105

बेसेल फलनों के गुणनफल वाले कतिपय परिमित समाकल

एस० एल० कल्ला
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—नवम्बर 30, 1967]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य श्रीवास्तव द्वारा प्राप्त नवीन फल को प्रयोग करते हुये बेसेल फलनों के गुणनफल वाले कतिपय परिमित समाकलों का मान ज्ञात करना है। इस शोधपत्र में स्थापित फल लेखक[3] द्वारा दिये गये फलों के विस्तार रूप हैं और विशिष्ट दशाओं के रूप में दिये गये फलों को भी समाविष्ट करते हैं।

Abstract

Some finite integrals involving product of Bessel functions. *By* S. L. Kalla, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

The object of the present paper is to evaluate some finite integrals involving product of Bessel functions by using a result recently given by H. M. Srivastava. The results established in this paper are the extension of the results recently given by author[3] and include the results given there as particular cases.

1. इधर श्रीवास्तव ने [5, p. 150] यह दिखाया है कि

$$\left(\tfrac{1}{2}x\right)^{\lambda-\Sigma\nu_i}\prod_{i=1}^{n}\{J_{\nu_i}(a_i x)\}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i)^{\nu_i}}{\prod_{i=1}^{n}\{\Gamma(1+\nu_i)\}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda+2r)\;\Gamma(\lambda+r)}{r!}J_{\lambda+2r}(x)$$

$$\times F_c\{-r,\lambda+r;\nu_1+1,\ldots,\nu_n+1;a_1^2,\ldots,a_n^2\}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i)^{\nu i}\Gamma(\lambda+1)}{\prod_{i=1}^{n}\{\Gamma(1+\nu_i)\}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}x)^r}{r\,!}\mathcal{J}_{\lambda+r}(x)$$

$$\times F_c\{-r,\ \lambda+1;\ \nu_1+1,\ \ldots,\ \nu_n+1;\ a_1^2,\ \ldots,\ a_n^2\} \tag{1.1}$$

जहाँ $\Sigma\nu_n$ से $\nu_1+\ldots+\nu_n$. का बोध होता है।

(1·1) के दोनों ओर $f(x)$ से गुणा करने पर तथा 0 से a तक x के सापेक्ष समाकलन करने पर और समाकलन तथा संकलन का क्रम उलट देने पर हमें

$$\int_0^a x^{\lambda-\Sigma\nu_i}\prod_{i=1}^{n}\{\mathcal{J}_{\nu i}(a_ix)\}f(x)dx$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i)^{\nu i}\,2^{\lambda-\Sigma\nu_i}}{\prod_{i=1}^{n}\{\Gamma(1+\nu_i)\}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda+2r)\,\Gamma(\lambda+r)}{r\,!}$$

$$\times F_c\{-r,\ \lambda+r;\ \nu_1,\ \ldots,\ \nu_n;\ a_1^2,\ \ldots,\ a_n^2\}\int_0^a \mathcal{J}_{\lambda+2r}(x)\,f\ x)\,dx \tag{1·2}$$

की प्राप्ति $R(\lambda+\xi+1)>0$ के लिये होगी यदि $f(x)=0(x^{\xi})$ जब x तथा $R(n+1)>0$ छोटे हों जहाँ $f(x)=0\{(x-a)^n\}$ यदि 'x' a की ओर प्रवृत्त हो।

समाकलन एवं संकलन के क्रम में परिवर्तन न्यायसिद्ध हैं क्योंकि [1, p. 500]

(1) श्रेणी

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda+2x)\ \Gamma(\lambda+r)}{r\,!}\mathcal{J}_{\lambda+2r}(x)$$

$$F_c\{-r,,\ \lambda-r;\ \nu_1+1,\ \ldots,\ \nu_n+1;\ a_1^2,\ \ldots,\ a_n^2\}$$

समान रूप से $0\leqslant x\leqslant\beta$ में अभिसारी है यदि β काल्पनिक हो।

(ii) बाईं ओर का समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी होगा, यदि $R(\lambda+\xi+1)>0$ जहाँ $f(x)=0(x^{\xi})$ क्योंकि 'x' शून्य की ओर प्रवृत्त होता है और $R(n+1)>0$ जहाँ $f(x)=O\{(x-a)^n\}$ क्योंकि 'x' a की ओर प्रवृत्त होता है यदि $0\leqslant x\leqslant a$, में शतत हो।

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य (1·2) फल की सहायता से बेसेल फलनों वाले कतिपय परिमित समाकलों का मान ज्ञात करना है।

2. इस अनुभाग में (1·2) की सहायता से कतिपय परिमित समाकलों का मान ज्ञात करना है :

यदि हम

$$f(x)=x^{\alpha-1}\,(a-x)^{\beta-1}\,\mathcal{J}_\rho(x),$$

लें तो (1·2) के प्रयोग से तथा दाहिनी ओर के समाकल का मान ज्ञात फल [4, p. 302] की सहायता से निकालने पर हमें

$$\int_0^a x^{\lambda+\alpha-\Sigma\nu_i-1}(a-x)^{\beta-1}\,\mathcal{J}_\rho(x)\prod_{i=1}^{n}\{\mathcal{J}_{\nu_i}(a_ix)\}dx$$

$$=\frac{2^{-\Sigma\nu_i-\rho}\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i)^{\nu_i}\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\rho+1)\prod\limits_{i=1}^{n}\{\Gamma(1+\nu_i)\}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+r)\,\Gamma(\lambda+2r+\rho+\alpha)\,2^{-2r}}{r\,!\,\Gamma(\lambda+2r)\,\Gamma(\lambda+2r+\rho+\alpha+\beta)}$$

$$a^{\lambda+\alpha+\beta+2r+\rho-1}\,F_c\{-r,\,\lambda+r;\,\nu_1+1,\,\ldots,\,\nu_n+1;\,a_1^2,\,\ldots,\,a_n^2\}$$

$${}_4F_5\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\lambda+2r+\rho+\alpha),\,\frac{1}{2}(\lambda+2r+\rho+\alpha+1),\,\frac{1}{2}(\rho+1),\,\frac{1}{2}(\rho+2);\,-a^2/4\\ \lambda+2r+1,\,\rho+1,\,\lambda+2r+\rho+1,\,\frac{1}{2}(\lambda+2r+\rho+\alpha+\beta),\,\frac{1}{2}(\lambda+2r+\rho+\alpha+\beta+1)\end{matrix}\right],$$

$$R(\lambda+\alpha+\rho)>0,\;R(\beta)>0. \tag{2·1}$$

प्राप्त होगा । यदि $n=2$, तो F_c एपेल फलन F_4 में घटित हो जाता है जिसके परिणाम स्वरूप (2·1) लेखक द्वारा दिये गये एक नवीन फल[3] में घटित हो जाता है ।

इसी प्रकार (2·2), (2·3), (2·4) तथा (2·5) फलों को (1·2) में $f(x)$ को क्रमशः $x^{\rho-1}(a-x)^{\sigma-1}$, $x^{-1}\,\mathcal{J}_\rho\,(a-x)$, $x^{-1}(a-x)^{-1}\,\mathcal{J}_\rho(a-x)$ तथा $x^{2\alpha-1}\,(a^2-x^2)^{\beta-1}\,\mathcal{J}_\rho(x)$ मानकर और दाईं ओर के समाकलों को क्रमशः ज्ञात फलों [2, p. 193], [2, p. 354] [2, p. 354(26)] तथा [4, p. 298] की सहायता से सत्यापित किया जा सकता है ।

$$\int_0^a x^{\lambda+\rho-\Sigma\nu_i-1}(a-x)^{\sigma-1}\prod_{i=1}^{n}\{\mathcal{J}_{\nu_i}(a_ix)\}dx$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i)^{\nu_i}\,\Gamma(\sigma)2^{-\Sigma\nu_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n}\{\Gamma(1+\nu_i)\}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+r)\Gamma(\rho+\lambda+2r)2^{-2r}\,a^{\rho+\sigma+\lambda+2r-1}}{r\,!\,\Gamma(\lambda+2r)\,\Gamma(\rho+\sigma+\lambda+2r)}$$

$$F_c\{-r,\,\lambda+r;\,\nu_1+1,\,\ldots,\,\nu_n+1;\,a_1^2,\,\ldots,\,a_n^2\}$$

$$\times F_c\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(\rho+\lambda+2r),\,\frac{1}{2}(\rho+\lambda+2r+1);\,-a^2/4\\ \lambda+2r+1,\,\frac{1}{2}(\rho+\sigma+\lambda+2r),\,\frac{1}{2}(\rho+\sigma+\lambda+2r+1)\end{matrix}\right],$$

$$R(\lambda+\rho)>0,\;R(\sigma)>0. \tag{2·2}$$

$$\int_0^a x^{\lambda-\Sigma\nu_i-1} \mathcal{J}_\rho(a-x) \prod_{i=1}^{n} \{\mathcal{J}_{\nu_i}(a_i x)\} dx$$

$$= \frac{2^{\lambda-\Sigma\nu_i} \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{\nu_i}}{\prod_{i=1}^{n} \{\Gamma(1+\nu_i)\}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+r)}{r!} \mathcal{J}_{\lambda+2r+\rho}(a)$$

$$\times F_c\{-r, \lambda+r; \nu_1+1, \ldots, \nu_n+1; a_1^2, \ldots, a_n^2\},$$

$$R(\lambda)>0, \quad R(\rho)>0. \tag{2·3}$$

$$\int_0^a x^{\lambda-\Sigma\nu_i-1} (a-x)^{-1} \mathcal{J}_\rho(a-x) \prod_{i=1}^{r} \{\mathcal{J}_{\nu_i}(a_i x)\} dx$$

$$= \frac{2^{\lambda-\Sigma\nu_i} \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{\nu_i}}{\prod_{i=1}^{n} \{\Gamma(1+\nu_i)\} \rho} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\rho+\lambda+2r)\, \Gamma(\lambda+r)}{r!} \mathcal{J}_{\lambda+2r+\rho}(a)$$

$$\times F_c\{-r, \lambda+r; \nu_1+1, \ldots, \nu_n+1; a_1^2, \ldots, a_n^2\}$$

$$R(\lambda)>0, \quad R(\rho)>0. \tag{2·4}$$

$$\int_0^a x^{\lambda+2\alpha-\Sigma\nu_i-1} (a^2-x^2)^{\beta-1} \mathcal{J}_\rho(x) \prod_{i=1}^{n} \{\mathcal{J}_{\nu_i}(a_i x)\} dx$$

$$= \frac{2^{\lambda-\Sigma\nu_i-\rho-1} \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{\nu_i} \Gamma(\beta)}{\prod_{i=1}^{n} \{\Gamma(1+\nu_i)\} \Gamma(\rho+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+r)\, \Gamma\left(\frac{\rho+\lambda+2r}{2}+\alpha\right) a^{\rho+\lambda+2r+2\beta-2}}{\Gamma(\lambda+2r)\, \Gamma\left(\frac{\rho+\lambda+2r}{2}+\alpha+\beta\right) r!}$$

$$\times F_c\{-r, \lambda+r; \nu_1+1, \ldots, \nu_n+1; r_1^2, \ldots, a_n^2\}$$

$${}_3F_4\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}(\rho+\lambda+2r+1), \frac{1}{2}(\rho+\lambda+2r+2), \frac{1}{2}(\rho+\lambda+2r)+\alpha \\ \rho+\lambda+2r, \rho+1, \lambda+2r+1, \frac{1}{2}(\rho+\lambda+2r)+\alpha+\beta \end{matrix}; -a^2\right],$$

$$R(P+\lambda+2\alpha)>0 \text{ तथा } R(\beta)>0. \tag{2·5}$$

यदि उपर्युक्त (2·2), (2·3), (2·4) तथा (2·5) फलों में $n=2$ रखा जाय तो वे इसके पूर्व लेखक द्वारा दिये गये ज्ञात परिणामों[3] में घटित हो जावेंगे।

कृतज्ञता-ज्ञापन

शतत् प्रोत्साहन के लिये लेखक प्रो० ग्रार० एस० कुशवाहा का ग्राभारी है।

निर्देश

1. ब्रामविच, टी० जे० आई० ए० । An Introduction to the Theory of Infinite Series, मैकमिलन, लन्दन, 1931.
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि । Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954.
3. कल्ला, एस० एल० । प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया), 1967 (प्रेस में)
4. ल्यूक, वाई० एल० । Integrals of Bessel Functions, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1962.
5. श्रीवास्तव, एच० एम० । प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया) 1966, **36,** 145-151.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 2, April 1970, Pages 107-112

बेसेल परिवर्त पर एक प्रमेय-भाग-II

के० एस० सेवरिया

गणित विभाग, राजकीय विद्यालय, अजमेर

[प्राप्त—सितम्बर 8, 1968]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य बेसेल परिवर्त सन्बन्धी प्रमेय को सिद्ध करना है और इस प्रमेय तथा इसकी उपप्रमेय का प्रयोग करते हुये लारिसेला के फलन F_c वाले समाकलों का मान निकालना है।

Abstract

A theorem on Bessel transform-II. *By* K. S. Sevaria, Department of Mathematics, Government College, Ajmer.

The object of this paper is to prove a theorem on Bessel transform and by using the theorem and its corollary we have evaluated integrals involving Lauricella's functions F_c.

1. **विषय प्रवेश :** किसी फलन $f(t)$ के हैंकेल परिवर्त

$$\psi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{1\ 2}\, \mathcal{J}_\nu(pt)f(t)\, dt$$

को सांकेतिक रूप से $\psi(p)\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}(t)$ के द्वारा अंकित किया जाता है।

2. **प्रमेय :**

यदि $\phi(p)\underset{\lambda}{\overset{\mathcal{J}}{=}}f(t)$

तथा $\psi(p)\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}t^{\sigma-3}K_\rho(bt)\prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu i}(a_i t)]\phi(t)$

तो

$$\psi(p)=\frac{2^{\sigma-2\,-(\nu+\lambda+m+\sigma)}\,p^{\nu+3/2}\,\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\lambda+\nu+m+\rho\prod_{i=1}^{r}(a_i^{\mu_i})}{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(1+\nu)\prod_{i=1}^{r}\Gamma[(1+\mu_i)]}$$

$$\times\int_0^\infty F_c[\tfrac{1}{2}\sigma+\nu+\lambda-\rho),\tfrac{1}{2}(\sigma+\nu+\lambda+m+\rho);1+\mu_1,\ldots,1+\mu_r,1+\nu,1+\lambda;$$

$$-\frac{a_1^2}{b^2},\ldots,\frac{-a_r^2}{b^2},\frac{-p^2}{b^2},\frac{-t^2}{b^2}\Big]\,t^{\lambda+1/2}f(t)\,dt \qquad (2\cdot1)$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|f(t)|$ एवं $|t^{\sigma-3}K_\rho(bt)\prod_{i=0}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_it)]\phi(t)|$ के हैंकेल परिवर्त विद्यमान हों तथा $p>0, R(b)>0$ $m=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i)$, $a_i>0$, $i=1, 2, \ldots, r$.

उपपत्ति :

$$\psi(p)=p\int_0^\infty (pt)^{1/2}\,t^{\sigma-3}\prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_it)]\,\mathcal{J}_\nu(pt)K_\rho(bt)\,\phi(t)dt$$

लेकिन $$\phi(t)=t\int_0^\infty (tx)^{1/2}\mathcal{J}_\lambda(tx)f(x)dx$$

$\therefore$ $$\psi(p)=p^{3/2}\int_0^\infty t^{\sigma-1}\prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_it)]\,\mathcal{J}_\nu(pt)\,K_\rho(bt)dt\int_0^\infty x^{1/2}\,\mathcal{J}_\lambda(tx)f(x)dx$$

समाकलन के क्रम को बदलने पर

$$\psi(p)=p^{3/2}\int_0^\infty x^{1/2}f(x)\,dx\int_0^\infty t^{\sigma-1}K_\rho(bt)\,\mathcal{J}_\nu(pt)\,\mathcal{J}_\lambda(xt)\prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_it)]dt$$

दाहिनी ओर सक्सेना के फल[2] की सहायता से t समाकल ज्ञात करने पर हमें फल $(2\cdot1)$ की प्राप्ति होती है।

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1}K_\rho(bt)\,\mathcal{J}_\nu(pt)\,\mathcal{J}_\lambda(xt)\prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_it)]dt$$

$$=\frac{2^{\sigma-1}\,b^{-m-\nu-\lambda-\sigma}\,\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\nu+\lambda+m\pm\rho)\}\prod_{i=1}^{r}(a_i^{\mu_i})\,p^\nu\,x^\lambda}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(1+\lambda)\prod_{i=1}^{r}[\Gamma(1+\mu_i)]}$$

$$\times F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\nu+\lambda+m-\rho),\tfrac{1}{2}(\sigma+\nu+\lambda+m+\rho);1+\mu_1,\ldots,1+\mu_r,1+\nu,1+\lambda$$

$$-\frac{a_r^2}{b^2},\ldots,\frac{-a_r^2}{b^2},\frac{-p^2}{b^2},\frac{-x^2}{b^2}\Big]$$

प्रमेय के साथ कथित शर्तों के अन्तर्गत समाकलन के क्रम का विलोमन विहित है क्योंकि आगत समाकल परम अभिसारी हैं।

$\rho=\pm\frac{1}{2}$ रखने पर हमें उपप्रमेय की प्राप्ति होगी।

उपप्रमेय :

यदि $\phi(p)\underset{\lambda}{\overset{\mathcal{J}}{=}}f(t)$

तथा
$$\psi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} t^{\sigma-7/2}\, e^{-bt} \prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_i t)]\, \phi(t)$$

तो
$$\psi(p)=\frac{2^{\sigma-3/2}\, p^{\nu+3/2}\, \Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda+\nu+m\pm\frac{1}{2})\} \prod_{i=1}^{r}(a_i^{\mu_i})}{\pi^{1/2}\, b^{\nu+\lambda+m+\sigma-1/2}\, \Gamma(1+\lambda)\, \Gamma(1+\nu) \prod_{i=1}^{r}[\Gamma(1+\mu_i)]}$$
$$\times \int_0^\infty t^{\lambda+1/2} F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\nu+\lambda+m-\tfrac{1}{2}),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\nu+\lambda+m+\tfrac{1}{2});\ 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r, 1+\nu, 1+\lambda;$$
$$-\frac{a_1^2}{b^2}, \ldots, \frac{-a_r^2}{b^2}, \frac{-p^2}{b^2}, \frac{-t^2}{b^2}\Big] f(t)\, dt$$

यदि समाकल अभिसारी हो एवं $|f(t)|$ तथा $|t^{\sigma-7/2}\, e^{-bt} \prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_i t)]\, \phi(t)|$ के हैंकेल परिवर्त विद्यमान हों तथा $m=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i)$, $p>0$, $b>0$, $a_i>0$, $i=1, 2, \ldots, r$.

उदाहरण :

यदि
$$f(t)=t^{\lambda+1/2} F_4\Big[\tfrac{1}{2}(l+\lambda+\delta-\mu), \tfrac{1}{2}(l+\lambda+\delta+\mu); 1+\lambda, 1+\delta; -\frac{t^2}{c^2}, \frac{d^2}{c^2}\Big]$$
$$\underset{\lambda}{\overset{\mathcal{J}}{=}} \frac{c^{l+\lambda+\delta}\, \Gamma(1+\lambda)\, \Gamma(1+\delta)\, p^{l-1/2}}{2^{l-2}\, d^{\delta}\, \Gamma\{\frac{1}{2}(l+\lambda+\delta\pm\mu)\}} \times I_\delta(dp)\, K_\mu(cp)$$
$=\phi(p)$, $R(l+\delta\pm\mu)>\frac{1}{2}$, $R(\lambda+1)>0$, $R(c)>0$, $p>0$ को लें [3 p. 110(15)]

तो हमें कुछ संशोधन सहित सक्सेना द्वारा दिया गया फल[2] प्राप्त होगा।

$$t^{\sigma-3} K_\rho(bt) \prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_i t)]\, \phi(t)$$
$$=\frac{c^{l+\lambda+\delta}\, \Gamma(1+\lambda)\, \Gamma(1+\delta)\, t^{\sigma+l-7/2}\, K_\rho(bt)\, K_\mu(ct)\, I_\delta(dt) \prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_i t)]}{2^{l-2}\, d^{\delta}\, \Gamma\{\frac{1}{2}(l+\lambda+\delta\pm\mu)\}}$$

$$\frac{\mathcal{J}}{\nu}\frac{1}{\Gamma\{\frac{1}{2}(l+\lambda+\delta\pm\mu)\}}$$

$$\times\sum_{\mu,-\mu}\frac{\Gamma(-\mu)\,2^{\sigma-3}\,\Gamma(1+\lambda)\;c^{l+\lambda+\delta+\mu}\,p^{\nu+3/2}\prod_{i=1}^{r}(a_i^{\mu_i})\;\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+l+\mu+\delta+\nu+m\pm\rho-2)\}}{b^{m+\mu+\delta+\nu+\sigma+l-2}\;\Gamma(1+\nu)\prod_{i=1}^{r}[(1+\mu_i)]}$$

$$\times F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+l+\mu+\delta+\nu+m-\rho-2),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+l+\mu+\delta+\nu+m+\rho-2);\ 1+\mu_1,\dots,1+\mu_r,$$

$$1+\mu,1+\delta,1+\nu;-\frac{a_1^2}{b^2},\dots,\frac{-a_r^2}{b^2},\frac{c^2}{b^2},\frac{d^2}{b^2},-\frac{p^2}{b^2}\Big]$$

$$=\psi(p)$$

यदि $R(\sigma+l+m+\mu+\delta+\nu\pm\rho)>2,\quad R(b+c)>|R(d)|+\sum_{i=1}^{r}|Im\,a_i|$

प्रमेय के सम्प्रयोग द्वारा

$$\int_0^\infty t^{2\lambda+1}F_4\left[\tfrac{1}{2}(l+\lambda+\delta-\mu),\ \tfrac{1}{2}(l+\lambda+\delta+\mu;)\ \ 1+\lambda,1+\delta;-\frac{t^2}{c^2},\frac{d^2}{c^2}\right]$$

$$\times F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\nu+\lambda+m-\rho),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+\nu+\lambda+m+\rho);\ 1+\mu_1,\dots,1+\mu_r,\ 1+\nu,\ 1+\lambda;$$

$$-\frac{a_1^2}{b^2},\dots,\frac{-a_r^2}{b^2},\frac{-p^2}{b^2},\frac{-t^2}{b^2}\Big]dt$$

$$=\frac{1}{2\Gamma\{\frac{1}{2}(l+\lambda+\delta\pm\mu)\}}$$

$$\times\sum_{\mu,-\mu}\frac{\Gamma(-\mu)\,[\Gamma(1+\lambda)]^2\,\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+l+\mu+\delta+\nu+m\pm\rho-2)\}\,b^{\lambda-\mu-\delta-l+2}\,c^{l+\lambda+\delta+\mu}}{\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda+\nu+m\pm\rho)\}}$$

$$\times F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+l+\mu+\nu+m-\rho-2),\ \tfrac{1}{2}(\sigma+l+\mu+\delta+\nu+m+\rho-2);\ 1+\mu_1,\dots,1+\mu_r,$$

$$1+\mu,1+\delta,1+\nu;\ -\frac{a_1^2}{b^2},\dots,\frac{-a_r^2}{b^2},\frac{c^2}{b^2},\frac{d^2}{b^2},\frac{-p^2}{b^2}\Big]$$

यदि $R(\lambda+1)>0,\ R(\sigma+\nu+m\pm\rho+l+\delta\pm\mu)>0,\ m=\sum_{i=1}^{r}(\mu_i), p>0, c>0, d>0, R(b)>0,$ $a_i\geqslant 0,\ i=1,2,\dots,r.$

$a_i=0,\ i=1,2,\dots,r$ यथा $d=0$ रखने पर शर्मा द्वारा दिया गया फल [2, p. 111 (16)] प्राप्त होता है।

उदाहरण

यदि $$f(t)=\frac{\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda-\delta\pm e+1)\}\,t^{\lambda+1/2}}{2^{\delta+1}\,a^{\lambda-\delta+1}\,\Gamma(\lambda+1)}\;{}_2F_1\left(\frac{\lambda-\delta+e+1}{2},\frac{\lambda-\delta-e+1}{2};\lambda+1;-\frac{t^2}{a^2}\right)$$

$$\underset{\lambda}{\overset{\mathcal{J}}{=}}p^{-\delta+1/2}K_e(cp)$$

$$=\phi(p),\; R(\lambda-\delta+1)>|R(e)|,\; R(a)>0$$

को लें [2, p. 111(6)] तो थोड़े संशोधन के साथ सक्सेना द्वारा दिया हुआ फल[2] प्राप्त होगा ।

$$t^{\sigma-7/2}\,e^{-bt}\prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_it)]\,\phi(t)$$

$$=t^{\sigma-\delta-3}\,e^{-bt}\,K_e(at)\prod_{i=1}^{r}[\mathcal{J}_{\mu_i}(a_it)]$$

$$\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$\sum_{e,-e}\frac{\Gamma(-e)\,2^{\sigma-\delta-4}\,\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma-\delta+e+\nu+m-\frac{1}{2})\}\,\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma-\delta+e+\nu+m-\frac{3}{2})\}p^{\nu+3/2}a^e\prod_{i=1}^{r}(a_i^{\mu_i})}{b^{m+e+\nu+\sigma-\delta-1}\,\Gamma(1+\nu)\prod_{i=1}^{r}[\Gamma(1+\mu_i)[}$$

$$\times F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma-\delta+e+\nu+m-\tfrac{1}{2}),\,\tfrac{1}{2}(\sigma-\delta+e+\nu+m-\tfrac{3}{2});\,1+\mu_1,\ldots,1+\mu_r,\,1+e,\,1+\nu;$$
$$-\frac{a_1^2}{b^2},\ldots,\frac{-a_r^2}{b^2},\frac{a^2}{b^2},\frac{-p^2}{b^2}\Big]$$

$$=\psi(p),\quad R(\sigma-\delta+e+m+\nu)>\tfrac{1}{2},\quad R(\sigma-\delta+e+m+\nu)>\tfrac{3}{2},\quad R(a+b)>\sum_{i=1}^{r}(|I_m\,a_i|)$$

उपप्रमेय का सम्प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{2\lambda+1}\,{}_2F_1\left(\frac{\lambda-\delta+e+1}{2},\frac{\lambda-\delta-e+1}{2}:1+\lambda;\frac{-t^2}{a^2}\right)$$

$$\times F_c\Big[\tfrac{1}{2}(\sigma+\nu+\lambda+m-\tfrac{1}{2}),\,\tfrac{1}{2}(\sigma+\nu+\lambda+m+\tfrac{1}{2});\,1+\mu_1,\ldots,1+\mu_r,\,1+\nu,\,1+\lambda;$$
$$-\frac{a_1^2}{b^2},\ldots,-\frac{a_r^2}{b^2},-\frac{p^2}{b^2},\frac{-t^2}{b^2}\Big]dt$$

$$=\frac{[\Gamma(1+\lambda)]^2}{2\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma+\lambda+\nu+m\pm\frac{1}{2})\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\lambda-\delta\pm e+1)\}}$$

$$\sum_{e,-e}\frac{\Gamma(-e)\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma-\delta+e+\nu+m-\frac{1}{2})\}\,\Gamma\{\frac{1}{2}(\sigma-\delta+e+\nu+m-\frac{3}{2})\}}{a^{\delta-\lambda-e-1}\,b^{e-\lambda-\delta-1}}$$

$$\times F_c\left[\tfrac{1}{2}(\sigma-\delta+e+v+m-\tfrac{1}{2}),\ \tfrac{1}{2}(\sigma-\delta+e+v+m-\tfrac{3}{2});\ 1+\mu_1, \ldots, 1+\mu_r,\ 1+e, 1+v;\right.$$
$$\left. -\frac{a_1^2}{b^2}, \ldots, \frac{-a_r^2}{b^2}, \frac{\alpha^2}{b^2}, \frac{-p^2}{b^2}\right]$$

यदि $R(\lambda+1)>0$, $R(\sigma+v+m\pm\frac{1}{2}-\delta\pm e)>1$, $p>0$, $b>0$, $\alpha>0$, $a_i>0, i=1, 2, \ldots, r$.

$a_i=0$, $i=1, 2, \ldots, r$ रखने पर हमें शर्मा [2, p. 111(16)] द्वारा दिया गया फल प्राप्त होगा।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०। Tables of Integral Transforms, **भाग** II, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1954.

2. सक्सेना, आर० के०। **मोनाटशेफ्टे फुर मैथेमैटिक**, 1966, **70**, 161-63.

3. शर्मा, के० सी०। **प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसो०**, 1963, **6**, 107-112.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 3, July 1970, Pages 113-128

हैंकेल एवं G-फलन परिवर्त सम्बन्धी प्रमेय–भाग 1

एस० सी० गुप्ता
गणित विभाग, राजकीय विद्यालय, कोटा

[प्राप्त—जून 10, 1968]

सारांश

इस शोधपत्र में शर्मा द्वारा पारिभाषित G-फलन परिवर्त पर दो प्रमेयों को सिद्ध किया गया है। इस प्रकार प्राप्त फल दो चरों वाले G-फलन हैं जिन्हें हाल ही में अग्रवाल ने पारिभाषित किया है। इनकी विशिष्ट दशाओं से कई फल निकलते हैं जो भोंसले, राठी, शर्मा, सिंह तथा वर्मा द्वारा पहले ही प्राप्त किये जा चुके हैं। दो चरों वाले G-फलन से सम्बन्धित कतिपय अनन्त समाकलों का भी मान प्राप्त किया गया है।

Abstract

Theorems on Hankel and G-function transform—I. *By* S. C. Gupta, Department of Mathematics, Government College, Kotah.

In this paper two theorems on *G*-function transform defined by Sharma have been proved. The results obtained are the *G*-function of two variables recently defined by Agrawal. Their particular cases give rise to several results given earlier by Bhonsle, Rathie, Sharma, Singh and Verma. A few infinite integrals involving the *G*-function of two variables have also been evaluated.

1. **विषय-प्रवेश :** फलन $f(t)$ के चिरसम्मत लैपलास परिवर्त को समीकरण

$$\psi(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\ dt \tag{1·1}$$

द्वारा पारिभाषित किया जाता है जिसे हम सांकेतिक रूप में $\psi(p) \doteqdot f(t)$ द्वारा व्यक्त करेंगे और इसके ν कोटि के हैंकेल परिवर्त को समीकरण

$$\phi(p)=\int_0^\infty (pt)^{1/2}\, \mathcal{J}_\nu(pt)\, f(t)\, dt \text{ द्वारा}$$

अथवा

$$\phi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(t) \text{ द्वारा ।}$$

हाल ही में शर्मा[12] ने $(0, \infty)$ अन्तराल में समाकल परिवर्त को निम्नांकित समीकरण द्वारा पारिभाषित किया है

$$\phi_m^n\left[f(t) : p : \begin{matrix} a_r, \alpha_s \\ b_i, \beta_j \end{matrix}\right] = \int_0^\infty e^{-1/4npt}\, G^{4,\, n}_{m+n,\, m+n+2}\left[\frac{p^2t^2}{4}\middle|\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \\ b_1, \ldots; b_4, \beta_1, \ldots, \beta_{m+n-2}\end{matrix}\right] f(t)\, dt \tag{1·3}$$

जहाँ $G^{mn}_{pq}\left(t\middle|\begin{matrix} a_r \\ b_s\end{matrix}\right)$ एक माइजर का G-फलन[7] है । हम इस G फलन परिवर्त को सांकेतिक रूप में $\phi(p)\underset{n,\, m}{\overset{G}{=}}f(t)$ द्वारा व्यक्त करेंगे ।

यह समाकल परिवर्त (1·3) विभिन्न समाकल परिवर्तों को सार्वीकृत करता है । इसकी कतिपय विशिष्ट दशायें निम्न प्रकार हैं :—

यदि $n=2,\ m=0,\ a_1=\frac{1}{2},\ a_2=1,\ b_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ b_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lambda,\ b_3=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ b_4=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\lambda$ तथा p को $2p$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर यह परिवर्त माइजर बेसल फलन परिवर्त[8] में लघुकरित हो जाता है जिसे

$$\psi_1(p)=\int_0^\infty (pt)^{1/2}\, k_\lambda(pt)\, f(t)dt \tag{1·4}$$

या $\psi_1(p) \underset{\lambda}{\overset{k}{=}}$ द्वारा पारिभाषित किया जाता है ।

जो सम्बन्ध पाया जाता है वह है—

$$\phi_0^2\left[f(t) : 2p : \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right]=2^{3/2}\, \pi\, \Gamma(\tfrac{1}{2}\pm\lambda)\psi_1(p) \tag{1·5}$$

व्हिटेकर फलन परिवर्त के साथ सम्बन्ध को जो

$$\psi_2(p)=\int_0^\infty (pt)^{\lambda-1/2}\, e^{-1/2pt}\, W_{k,\, m}(pt)\, f(t)\, dt \tag{1·6}$$

या

$\psi_2(p)\underset{\lambda,\, k,\, m}{\overset{W}{=}} f(t)$ द्वारा पारिभाषित होता

$$\phi_0^4\left[f(t):p:\begin{matrix}\beta_1, \beta_2, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\lambda, 1+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda, -\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda, \beta_1, \beta_2\end{matrix}\right]$$

$=2^{2+k-\lambda}\,\pi^{3/2}\,\Gamma(-k\pm m)\,\psi_2(p)$ के रूप में प्राप्त किया जाता है ।

यदि $\lambda=m$ तो (1·7) सम्बन्ध द्वारा वर्मा के द्वितीय प्रकार का सम्बन्ध[16] चित्रित होता है और $\lambda=-k$ होने पर माइजर व्हिटेकर फलन परिवर्त[9] ।

इस शोधपत्र का उद्देश्य $t^{\mu} f(t^{r/s})$ तथा $t^{\mu} f(t^{-r/s})$ के G-फलन परिवर्त एवं $f(t)$ के हैंकेल परिवर्त के मध्य हाल ही में अग्रवाल[1] तथा शर्मा[11] द्वारा पारिभाषित दो चरों वाले G-फलन के रूप में सम्बन्ध प्राप्त करना है । भोंसले[2], शर्मा[13], सिंह[14] तथा वर्मा[15] द्वारा प्राप्त परिणाम प्रमेयों की विशिष्ट दशाओं के रूप में है । आगे संकेत (a_p) से $a_1; a_2; \ldots, a_p$ अवयवों के t अनुक्रम का, $\triangle(n, a)$ से $\frac{a}{n}, \frac{a+1}{n}, \ldots, \frac{a+n-1}{n}$ प्राचलों के समूह का, $[\triangle(n, a_r)]$ से $\triangle(n, a_1), \triangle(n, a_2), \ldots, \triangle(n, a_r)$. $\triangle(, a\pm b)\equiv\triangle(n, a+b), \triangle(n, a-b); \Gamma(a\pm b)=\Gamma(a+b)\Gamma(a+b)$ का बोध होगा :—

2. उपपत्ति में लेखक[5, 6] द्वारा सिद्ध निम्नांकित फलों की आवश्यकता होगी

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}\; G_{C\,D}^{A\,B}\left(ax\left|\begin{matrix}(e_C)\\(f_D)\end{matrix}\right.\right)\; G_{q\,r}^{h\,o}\left(bx\left|\begin{matrix}(a_q)\\(\beta_r)\end{matrix}\right.\right)\; G_{\gamma\;\delta}^{\alpha\;\beta}\left(cx^{n/m}\left|\begin{matrix}(a_\gamma)\\(b_\delta)\end{matrix}\right.\right)dx \tag{2·1}$$

$$=(2\pi)^{(1-n)\,(h-1/2q-1/2r+A+B-1/2C-1/2D)+(1-m)(\alpha+\beta-1/2\gamma-1/2\delta)}$$

$$\times\, n^{\Sigma\beta_j-\Sigma\alpha_j+(\lambda-1/2)(r-q)+\Sigma f_j-\Sigma e_j+1/2C-1/2D+1}\; m^{\Sigma b_j-\Sigma a_j+1/2\gamma-1/2\delta+1}\; b^{-\lambda}$$

$$\times\, G_{nr,\;[nC:m\gamma],\;nq,\;[nD;\;m\delta]}^{nh,\;nB,\;m\beta,\;nA,\;m\alpha}\left[\begin{matrix}\dfrac{a^n n^{n(C-D)}}{b^n n^{n(q-r)}}\\ \dfrac{c^m m^{(\gamma-\delta)}}{b^n\, n^{n(q-r)}}\end{matrix}\left|\begin{matrix}[\triangle(n, 1-\beta_r-\lambda)]\\ [\triangle(n, 1-e_c)];\,[\triangle(m, 1-a_\gamma)]\\ [\triangle(n, a_q+\lambda)]\\ [\triangle(n, f_D)];\,[\triangle(m, b_s)]\end{matrix}\right.\right]$$

यदि $2(h+A+B)>q+r+C+D,\; 2(nh+m\beta+ma)>nq+nr+m\gamma+m\delta$

$$\left|\arg\frac{a}{b}\right|<\pi(h+A+B-\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{2}r-\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}D)$$

$$\left|\arg\frac{c^m}{b^n}\right|<\pi(+nh+m\beta+m\alpha-\tfrac{1}{2}nq-\tfrac{1}{2}nr-\tfrac{1}{2}m\gamma-\tfrac{1}{2}m\delta)$$

जहाँ

$$G^{n,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p,\ [t:\ t'],\ s,\ [q:\ q']}\left[\begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} (\epsilon_p) \\ (\gamma_t);\ (\gamma'_{t'}) \\ (\delta_p) \\ (\beta_q);\ (\beta'_{q'}) \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\prod_{j=1}^{\nu_1}\Gamma(\gamma_j+\xi)\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(\beta_j-\xi)\prod_{j=1}^{\nu_2}\Gamma(\gamma'_j+\eta)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(\beta_j'-\eta)}{\prod_{j=\nu_1+1}^{t}\Gamma(1-\gamma_j-\xi)\prod_{j=m_1+1}^{q}\Gamma(1-\beta_j+\xi)\prod_{j=\nu_2+1}^{t}\Gamma(1-\nu'_i-\eta)\prod_{j=m_2+1}^{q'}\Gamma(1-\beta'_i+\eta)}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-\epsilon_j+\xi+n)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(\epsilon_j-\xi-\eta)\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\delta_j+\xi+\eta)}\ x^{\xi}y^{\eta}\,d\xi\,d\eta$$

$$G^{2r,\ 2r,\ s\beta,\ 4r,\ s\alpha}_{2r,\ [2r\ :\ s\gamma],\ 0,\ [4r\ :\ s\delta]}\left[\begin{matrix} 2^{2r} \\ \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \triangle(s,\ \epsilon), \triangle(r, \epsilon+\frac{1}{2}) \\ \triangle(r,\ 0),\ \triangle(r,\ \frac{1}{2});\ [\triangle(s,\ 1-e_r)] \\ - \\ \triangle(r,\ \frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\lambda),\ \triangle(r, \frac{3}{4}\pm\frac{1}{2}\lambda);\ [\triangle(s, f_s)] \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\pm\lambda)}{(2r)^{1/2}(2\pi)^{3/2-3r}}\ G^{s\alpha,\ s\beta+2r}_{s\gamma+2r,\ s\delta}\left[y\middle|\begin{matrix} \triangle(r,\ \epsilon+\frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\lambda),\ [\triangle(s,\ e_r] \\ [\triangle(s, f_\delta)] \end{matrix}\right] \tag{2·2}$$

तथा

$$G^{2r,\ 2r,\ s\beta,\ 4r,\ s\alpha}_{2r,\ [2r\ :\ s\gamma],\ 0,\ [4r:\ s\delta]}\left[\begin{matrix} 1 \\ \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \triangle(r,\ \epsilon),\ \triangle(r,\ \epsilon+\frac{1}{2}) \\ \triangle(r,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\lambda),\ \triangle(r,\ -\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\lambda);\ [\triangle(s,\ 1-e_r)] \\ - \\ \triangle(r,\ \pm\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda),\ \triangle(r,\ \frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda);\ [\triangle(s, f_\delta)] \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{(2r)^{2k+1/2}\,\Gamma(-k\pm m)}{(2\pi)^{3/2-3r}}\ G^{s\alpha,\ s\beta,+4r}_{s\gamma+4r,\ s\delta+2r}\left[y\middle|\begin{matrix} \triangle(2r,\ +2\epsilon\pm m-\lambda),\ [\triangle(s,\ e_r)] \\ [\triangle)s, f_\delta)],\ \triangle(2r.\ 2\epsilon+k-\lambda) \end{matrix}\right] \tag{2·3}$$

यदि $s\alpha+s\beta+r>\frac{1}{2}s\gamma+\frac{1}{2}s\delta,\ |\arg y|<\pi[s\alpha+s\beta+r-\frac{1}{2}s\gamma-\frac{1}{2}s\delta]$

माइजर के G-फलन तथा हाइपरज्यामितीय फलन के निम्नांकित गुणों की भी आवश्यकता पड़ेगी :

$$G_{p,q}^{m,n}\left(x\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+p)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)}x^s\,ds \tag{2·4}$$

$$x^{\sigma}G_{p\ q}^{m\ n}\left(x\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right)=G_{p\ q}^{m\ n}\left(x\left|\begin{matrix}(a_p+\sigma)\\(b_q+\sigma)\end{matrix}\right.\right) \tag{2·5}$$

$$G_{p\ q}^{m\ n}\left(x^{-1}\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right)=G_{q\ p}^{n\ m}\left(x\left|\begin{matrix}(1-b_q)\\(1-a_p)\end{matrix}\right.\right) \tag{2·6}$$

$$G_{p\ q}^{1\ p}\left(x\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right.\right)=\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(1+b_1-a_j)}{\prod_{j=2}^{q}\Gamma(1+b_1-b_j)}x^{b_1}{}_pF_{q-1}\left(\begin{matrix}1+b_1-a_1,\ \ldots,\ 1+b_1-a_p\\1+b_1-b_2,\ \ldots,\ 1+b_1-b_2\end{matrix};-x\right) \tag{2·7}$$

3. **प्रमेय I :** यदि

$$\psi(p)\underset{n,\,m}{\overset{G}{=\!=}}t^{\mu}f(t^{r/p})$$

तथा

$$\phi(p)\underset{\nu}{\overset{J}{=\!=}}f(t)$$

तो

$$\psi(p)=\left(\frac{8r}{np}\right)^{\mu+r/2s+1}(2\pi)^{(1-r)(4-m)-1/2}(2r)^{-1/2}\,r^{\Sigma b_j+\Sigma\beta_j-\Sigma a_j-\Sigma\alpha_j}$$

$$\times\int_0^{\infty}x^{1/2}\phi(x)\,G_{2r,\,[r(m+n):\,0],\,0,\,[r(m+n+2):\,2s]}^{2r,\,rn,\,0,\,4r,\,s}\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r}\\ \\ \left(\frac{x}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\Delta(r,-\frac{1}{2}\mu-r/4s),\ \Delta(r,-\frac{1}{2}\mu-r/4s+\frac{1}{2})\\ [\Delta(r,1-a_n)],[\Delta(r,1-\alpha_m)];\\ -\\ [\Delta(r,b_4)],[\Delta(r,\beta_{m+n-2})];\ \Delta(s,\pm\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right.\right]dx \tag{3·1}$$

यदि m तथा n, r तथा s ऐसी अनृण पूर्ण संख्यायें हों कि $0 \leqslant m \leqslant 3$, $n > 0$, $m+n \geqslant 2$, $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $R\left(\mu+\frac{r}{2s}+\frac{r}{s}\ \nu+2 \min b_j+1\right) \rhd 0$, $R\left(\mu+\frac{r}{s}\ \rho+2 \min b_j+1\right)>0$ यदि $f(t) \sim t^{\rho}$ लघु t, $R(p)>0$, $R(\alpha)>0$, के लिए ; यदि $f(t) \sim e^{-\alpha t}\, t^{\sigma}$ दीर्घ t तथा $|x^{1/2} \mathcal{J}_\nu(t^{r/s}\ x)\ \phi(x)| \epsilon$ $L(0, \infty)$.

उपपत्ति : हैंकेल व्युत्क्रम सूत्र[4]

$$f(t)=\int_0^\infty (tx)^{1/2} \mathcal{J}_\nu(tx)\ \phi(x)\ dx \text{ है} \tag{3·2}$$

और अभिकल्पना के द्वारा

$$\phi(x)=\int_0^\infty e^{-1/4npt}\, G^{4,\ n}_{m+n,\ m+n+2}\left(\tfrac{1}{4}p^2t^2 \middle| \begin{matrix}(a_n),\ (\alpha_m)\\ (b_4),\ (\beta_{m+n-2})\end{matrix}\right) t^{\mu} f(t^{r/s})\ dt \tag{3·3}$$

$$\therefore \qquad \psi(p)=\int_0^\infty e^{-1/4npt}\ G^{4,\ n}_{m++,\ m+n+2}\left(\tfrac{1}{4}p^2t^2 \middle| \begin{matrix}(a_n),\ (a_m)\\ (b_4),\ (\beta_{m+n-2})\end{matrix}\right) t^{\mu}$$

$$\times\left\{\int_0^\infty (t^{r/s}\ x)^{1/2} \mathcal{J}_\nu(t^{r/s}\ x)\ \phi(x)\ dx\right\} dt \tag{3·4}$$

उपर्युक्त अवस्थाओं में न्यायोचित होने के कारण समाकल क्रम में परिवर्तन करने से :

$$\psi(p)=\int_0^\infty x^{1/2}\ \phi(x)\left\{\int_0^\infty t^{\mu+r/2s}\ G^{4,\ n}_{m+n,\ m+n+2}\left[\tfrac{1}{4}p^2t^2 \middle| \begin{matrix}(a_n),\ (\alpha_m)\\ (b_4),\ (\beta_{m+n-2}\end{matrix}\right]\right.$$

$$\left.\times\, e^{-1/4npt}\ \mathcal{J}_\nu(t^{r/s}\ x)\ dt\right\} dx \tag{3·5}$$

आन्तरिक समाकल का मान (2·1) की सहायता से निकालने पर फल की प्राप्ति होती है क्योंकि

$$e^{-1/4npt}=\pi^{-1/2} G^{2\ 0}_{0\ 2}\left(\tfrac{1}{64}n^2p^2t^2 \middle|\ 0,\ \tfrac{1}{2}\right)$$

तथा

$$\mathcal{J}_\nu(x\ t^{r/s})=G^{1\ 0}_{0\ 2}\left(\tfrac{1}{4}x^2\ t^{2r/s} \middle|\ \tfrac{1}{2}\nu,\ -\tfrac{1}{2}\nu\right)$$

समाकलन के क्रम में परिवर्तन को तर्कसंगत सिद्ध करने के लिये हम देखते हैं कि t-समाकल परम अभिसारी है यदि $R\left(\mu+\frac{r}{2s}+2 \min b_j+\frac{r}{s}\ \nu+1\right)>0$ क्योंकि दीर्घ t के लिये

$$e^{-1/4npt}\ G^{4,\ n}_{m+n,\ m+n+2}\left[\tfrac{1}{4}\ p^2t^2 \middle| \begin{matrix}(a)_n,\ (\alpha_m)\\ (b_4),\ (\beta_{m+n-2})\end{matrix}\right]$$

घातीयतः लुप्त हो जाता है जब $R(p)>0$, m तथा n ऋनृण पूर्ण संख्यायें नहीं होतीं जिससे कि $0\leqslant m\leqslant 3,\ n\geqslant 0,\ m+n\geqslant 2,\ |\arg p|\leqslant \min\left(\frac{1}{2}\pi,\ 3-m\pi/2\right)$ तथा लघु t के कि लिए

$$G_{p,q}^{m,\,n}\left(x\middle|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)=O(x^{\min b_h}),\ \ h=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

(ii) x-समाकल परम अभिसारी होता है जब

$$|x^{1/2}\ \mathcal{J}_\nu(t^{r/s}\,x)\ \phi(x)|\epsilon\, L(0,\ \infty)$$

(iii) यदि लघु t के लिए $f(t)=O(t^\rho)$ तथा दीर्घ t के लिए $f(t)=O(e^{-\alpha t}\,t^\sigma)$ तो परिणामी समाकल परम अभिसारी होगा यदि

$$R\left(\mu+\frac{r}{s}\rho+2\min b_j+1\right)>0 \text{ तथा } R(p)>0 \text{ यदि } r<s,\ \ R(a)>0 \text{ यदि } r>s,\ R(\tfrac{1}{4}np+a)>0$$

यदि $r=s$.

उदाहरण-1 यदि हम [4, eqn. (20), p. 91] को लें

$$f(t)=t^{-1/2}\ G_{C\ D}^{A\ B}\left(\lambda\, t^2\middle|\begin{matrix}(e_C)\\(f_D)\end{matrix}\right)$$

$$\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\frac{1}{p^{1/2}}\ G_{C+2,\ D}^{A,\ B+1}\left(\frac{4\lambda}{p^2}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ (e_C),\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu\\(f_D)\end{matrix}\right)$$

$$=\phi(p)$$

$\because$ अभिकल्पना द्वारा

$$\psi(p)\underset{n\ ,m}{\overset{G}{=\!=}}t^\mu f(t^{r/s}),\ (2\cdot 1) \text{ के सम्प्रयोग से}$$

$$\left(\frac{8r}{np}\right)^{\mu+1-r/2s} s^{\Sigma f_j-\Sigma e_j+1/2C-1/2D+1}\ r^{\Sigma b_j+\Sigma\beta_j-\Sigma a_j-\Sigma\alpha_j}$$

$$\times(2\pi)^{(1-r)(4-m)-1/2+(1-s)(A+B-1/2C-1/2D)}\ (2r)^{-1/2}\ G^{2r,\ rn,\ sB,\ 4r,\ sA}_{2\ r,\ [r(m+n):\ sC],\ 0,\ [r(m+n+2):\ sD]}$$

$$\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r}\\ \\ (\lambda s^{C-D})^s\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\triangle(r,\ -\mu/2+r(4s),\ \triangle(r,\ -\mu/2+r/4s+\frac{1}{2})\\ [\triangle(r,1-a_n)],\ [\triangle(r,\ 1-\alpha_m)];\ [\triangle(s,\ 1-e_C)]\\ --\\ [\triangle(r,\ b_4)],[\triangle(r,\ \beta_{m+n-2})];\ [\triangle(s,\ f_D)]\end{matrix}\right]$$

प्रमेय (3·1) के द्वारा प्राचलों में थोड़ा हेर-फेर करने पर हमें

$$\int_0^\infty G^{2r,\, rn,\, 0,\, 4r,\, s}_{2r,\, [r(m+n):\, 0],\, 0,\, [r(m+n+2):\, 2s]}\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \\ \left(\frac{x}{2s}\right)^{2r}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\triangle(2r,\, -\mu-r/2s \\ [\triangle(r,1-a_n)],[\triangle(r,1-\alpha_m)];- \\ - \\ [\triangle(r,\, b_4)],\, [\triangle(r,\, \beta_{m+n-2})];\triangle(s,\pm\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right] \tag{3·6}$$

$$\times G^{B\ A}_{CD}\left(\frac{x^2}{4\lambda}\middle|\begin{matrix}(1-f_D) \\ (1-e_C)\end{matrix}\right)dx$$

$$=\left(\frac{np}{8r}\right)^{r/s}(2\pi)^{(1-s)(A+B-1/2C-1/2D)}\ s^{\Sigma f_j-\Sigma e_j+1/2C-1/2D}\times G^{2r,\, rn,\, sB,\, 4r,\, s(A+1)}_{2r,\, [r(m+n):\, sC],\, 0,[r(m+n+2):\, s(D+2)]}$$

$$\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \\ \left(\frac{\lambda}{s^{D+2-C}}\right)^{s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\triangle(2r,\, -\mu+r/2s) \\ [\triangle(r,\, 1-a_n)],\, [\triangle(r,\, 1-\alpha_m)];\, [\triangle(s,\, 1-e_C)] \\ - \\ [\triangle(r,\, b_4)],[\triangle(r,\, \beta_{m+n-2})];\ \triangle(s,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu),[\triangle(s,f_D)],\ \triangle(s,\, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right]$$

की प्राप्ति होगी किन्तु शर्त है कि $R(p)>0,\ 2(B+A)>D+C,\ |\arg\lambda|<(A+B-\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}D)\pi$, $0\leqslant m\leqslant 3,\ n>0,\ m+n\geqslant 2,$, तथा s ग्रनृरग पूर्ण संख्यायें हैं। $R(\nu+1)>0,\ R(\frac{1}{2}\nu-e_j+\frac{3}{2})>0$, $R(\mu+r/2s+r/s\,\nu+2\min b_j+1)>0,\ R(\mu+2\min b_j+1)>2r/s\ R(\frac{1}{4}-\min f_j)>0$.

यदि हम (3·6) में $r=s=1,\ m=3,\ a_r=b_{r+1}(r=1,2,3),\ a_r=\beta_{r+1}\ (r=1,2,\ldots,n)$, $B=1,\ A=2,\ D=2,\ C=2,\ \rho_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu,\ \rho_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu$ रखें तो इससे शर्मा [13, p. 111] द्वारा प्राप्त फल उपलब्ध होगा।

पुनः (3·6) में प्राचलों को उपयुक्त मान प्रदान करने पर हमें निम्नांकित रोचक विशिष्ट दशायें प्राप्त हो सकती हैं जिससे हमें दो चरों वाले G-फलन के विभिन्न समाकल परिवर्त प्राप्त होंगे।

(i) $B=1,\ A=0,\ D=0,\ C=2,\ e_1=1-\rho_1,\ e_2=1-\rho_2$, मानने पर हमें

$$\int_0^\infty x^{\rho_1+\rho_2}\,\mathcal{J}_{\rho_1-\rho_2}(\lambda x)\,G^{2r,\, rn,\, 0,4r,\, s}_{2r,\, [r(m+n):\, 0],\, 0,\, [r(m+n+2):\, 2s]}$$

$$\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \\ \left(\frac{x}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\triangle(2r,\, -\mu-r/2s) \\ [\triangle(r,\, 1-a_n)],\, [\triangle(r,\, 1-\alpha_m)];- \\ - \\ [\triangle(r,\, b_4)],\, [\triangle(r,\, \beta_{m+n-2});\ \triangle(s\pm\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right] \tag{3·7}$$

$$=(2\lambda^{-1})^{\rho_1+\rho_2}\, s^{\rho_1+\rho_2-1}\left(\frac{np}{8r}\right)^{r/s} \times G^{2r,\ rn,\ s,4r,s}_{2r,[r(m+n):\ 2s],\ 0,\ [r(m+n+2):\ 2s]}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{4}{n}\right)^{2r} & \Delta(2r,\ -\mu+r/2s) \\ & [\Delta(r,\ 1-a_n)],\ [\Delta(r,\ 1-\alpha_m)];[\Delta(s,\ \rho_2)] \\ \lambda^{-2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r} & - \\ & [\Delta(r,\ b_4)],[\Delta(r,\ \beta_{m+n-2})];\ \Delta(s,\ \tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\nu) \end{bmatrix}$$

प्राप्त होगा यदि $\lambda>0$, $R(p)>0$, $R(\nu+1)>0$, $R(\frac{1}{2}\nu+\rho_1+\frac{1}{2})>0$, $R(\frac{1}{2}\nu+\rho_2+\frac{1}{2})>0$, $R(\mu+r/2s+r/s\ \nu+2\min b_j+1)>0$, m, n, r तथा s ऐसी अनृण पूर्ण संख्याएँ हैं कि $0\leqslant m\leqslant 3$, $n>0$, $m+n\geqslant 2$, $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$.

(ii) $B=2$, $A=0$, $D=0$, $C=2$, $e_1=1-\rho_1$, $e_2=1-\rho_2$, रखने पर हमें

$$\int_0^\infty x^{\rho_1+\rho_2} K_{\rho_1-\rho_2}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) G^{2r,\ rn,0,\ 4r,s}_{2r,\ [r(m+n):\ 0],\ 0,\ [r(m+n+2):\ 2s]}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{4}{n}\right)^{2r} & \Delta(2r,\ -\mu-r/2s) \\ & [\Delta(r,\ 1-a_n)],\ [\Delta(r,\ 1-\alpha_m)];- \\ \left(\frac{x}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r} & - \\ & [\Delta(r,\ b_4)],\ [\Delta(r,\ \beta_{m+n-2})];\ \Delta(s,\ \pm\tfrac{1}{2}\nu) \end{bmatrix} dx \qquad (3\cdot 8)$$

$$=2^{\rho_1+\rho_2-1}\,\lambda^{-\rho_1-\rho_2}\, s^{\rho_1+\rho_2-1}\left(\frac{np}{8r}\right)^{r/s} G^{2r,\ rn,\ 2s,\ 4r,\ s}_{2r,\ [r(m+n):\ 2s],\ 0,\ [r(m+n+2):\ 2s]}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{4}{n}\right)^{2r} & \Delta(2r,\ -\mu+r/2s) \\ & [\Delta(r,\ 1-a_n)],\ [\Delta(r,\ 1-\alpha_m)];\ [\Delta(s,\ \rho_2)] \\ \lambda^{-2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r} & - \\ & [\Delta(r,\ b_4)],\ [\Delta(r,\ \beta_{m+n-2})];\ \Delta(s,\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\nu) \end{bmatrix}$$

प्राप्त होगा यदि $R(\lambda)>0$, $R(p)>0$, $R(\nu+1)>0$, $R(\frac{1}{2}\nu+\rho_1+\frac{1}{2})>0$, $R(\frac{1}{2}\nu+\rho_2+\frac{1}{2})>0$, $R(\mu+r/2s\ \nu+2\min b_j+1)>0$, m, n, r, s ऐसी अनृण पूर्ण संख्यायें हैं कि $0\leqslant m\leqslant 3$, $n>0$, $m+n\geqslant 2$, $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$.

(iii) $B=2$, $A=0, D=1$, $C=3$, $f_1=\frac{3}{2}-\rho_1$, $e_1=1-\rho_1$, $e_2=1-\rho_2$, $e_3=\frac{3}{2}-\rho_2$ रखने पर हमें

$$\int_0^\infty x^{\rho_1+\rho_2}\, \gamma_{\rho_2-\rho_1}(\lambda x)\, G^{2r,\, rn,\, 0,\, 4r,\, s}_{2r,\, [r(m+n):\, 0],\, 0,\, [r(m+n+2):\, 2s]}\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \left(\frac{x}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(2r, -\mu-r/2s) \\ [\triangle(r, 1-a_n)], [\triangle(r, 1-a_m)];- \\ - \\ [\triangle(r, b_4)], [\triangle(r, \beta_{m+n-2})];\ \triangle(s, \pm\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right.\right]dx \tag{3·9}$$

$$=(2\lambda^{-1})^{\rho_1+\rho_2}\, s^{\rho_1+\rho_2-1}\left(\frac{np}{8r}\right)^{r/s} G^{2r,\, rn,\, 2s,\, 4r,\, s}_{2r,\, [r(m+n):\, 3s],\, 0,\, [r(m+n+2):\, 3s]}$$

$$\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\lambda^{-2s}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(2r, -\mu+r/2s) \\ [\triangle(r, 1-a_n)], [\triangle(r, 1-a_m)];\ [\triangle(s,\rho_2)], \triangle(s, \rho_1-\frac{1}{2}) \\ - \\ [\triangle(r, b_4)], [\triangle(r, \beta_{m+n-2})];\ \triangle(s, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu), \triangle(s, \frac{3}{2}-\rho_1), \triangle(s, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right.\right]$$

प्राप्त होगा यदि $\lambda>0$, $R(p)>0$, $R(\nu+1)>0$, $R(\frac{1}{2}\nu+\rho_1)>0$, $R(\frac{1}{2}\nu+\rho_2+\frac{1}{2})>0$, $R(\mu+r/2s+r/s\ \nu+2\min b_j+1)>0$, m तथा n, r तथा s ऐसी अनृण पूर्ण संख्याएँ हैं कि $0\leqslant m\leqslant 3$, $n\geqslant 0$, $m+n\geqslant 2$, $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$.

(iv) $B=1$, $A=1$, $C=3$, $D=1$, $f_1=1-\rho_1$, $e_1=1-\rho_1$, $e_2=1-\rho_2$, $e_3=\frac{3}{2}-\rho_1$ रखने पर हमें

$$\int^\infty x^{\rho_1+\rho_2-1/2}\, H_{\rho_1-\rho_2-1/2}(\lambda x)\, G^{2r,\, rn,\, 0,\, 4r,\, s}_{2r,\, [r(m+n):\, 0],\, 0,\, [r(m+n+2):\, 2s]}\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \left(\frac{x}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(2r, -\mu-r/2s) \\ [\triangle(r, 1-a_n)], [\triangle(r, 1-a_m)];- \\ - \\ [\triangle(r, b_4)], [\triangle(r, \beta_{m+n-2})];\ \triangle(s, \pm\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right.\right) \tag{3·10}$$

$$=\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\rho_1+\rho_2-1/2} s^{\rho_1+\rho_2-3/2}\left(\frac{np}{8r}\right)^{r/s} G^{2r,\, rn,\, s,\, 4r,\, s}_{2r,\, [r(m+n):\, 3s],\, 0,\, [r(m+n+2):\, 3s]}$$

$$\left(\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \lambda^{-2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(2r, -\mu+r/2s) \\ [\triangle(r, 1-a_n)], [\triangle(r, 1-a_m)];\ [\triangle(s, \rho_2)], \triangle(s, \rho_1-\frac{1}{2}) \\ - \\ [\triangle(r, b_1)], [\triangle(r,\beta_{m+n-2})];\ \triangle(s, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu), \triangle(s, 1-\rho_1), \triangle(s, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right.\right)$$

प्राप्त होगा यदि $\lambda>0$, $R(p)>0$, $R(\nu+1)>0$, m, n, r, s ऐसी ग्रनृग पूर्ण संख्यायें हैं कि

$$0\leqslant m\leqslant 3,\ n>0,\ m+n\geqslant 2,\ R(\tfrac{1}{2}\nu+\rho_1)>0,\ R(\tfrac{1}{2}\nu+\rho_2+\tfrac{1}{2})>0,$$

$$R(\mu+r/2s+r/s\ \nu+2\min b_j+1)>0.$$

(v) $B=4$, $A=0$, $D=2$, $C=4$, $f_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}k$, $f_2=-\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}k$, $e_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}l$, $e_2=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}l$, $e_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}l$, $e_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}l$, रखने पर

$$\int_0^\infty x^l\, e^{-1/2\lambda x}\, W_{k,\sigma}(\lambda x)\, G^{2r,\ rn,\ 0,\ 4r\ s}_{2r,\ [r(m+n):\ 0],\ [r(m+n+2):\ 2s]}\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \\ \left(\frac{x}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(2r,\ -\mu-r/2s) \\ [\triangle(r,\ 1-a_n)],\ [\triangle(r,\ 1-a_m)];— \\ — \\ [\triangle(r,\ b_4)],\ [\triangle(r,\ \beta_{m+n-2})];\ \triangle(s,\ \pm\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right.\right]dx \tag{3·11}$$

$$=\lambda^{-l}\,\pi^{-1/2}\,2^{l+k}\,s^{l+k-1/2}\left(\frac{np}{8r}\right)^{r/s}(2\pi)^{(1-s)}G^{2r,\ rn,\ 4s,\ s}_{2r,\ [r(m+n):\ 4s],\ 0,\ [r(m+n+2):\ 4s]}\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \\ \lambda^{-2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(2r,\ -\mu+r/2s) \\ [\triangle(r,\ 1-a_n)],\ [\triangle(r,\ 1-a_m)];\ \triangle(2s,\ l\pm\sigma+\frac{1}{2}) \\ — \\ [\triangle(r,\ b_4)],\ [\triangle(r,\ \beta_{m+n-2})];\ [\triangle\end{matrix}\right.\right.$$

$R(\lambda)>0$, $R(p)>0$, $R(\nu+1)>0$, $R(\mu+r/2s+r/s\ \ \nu+2\min\ b_j+1)>0$, $R(l\pm\sigma+\frac{1}{2})>0$, $R(\mu+2\min b_j+1)>2r/s(l-k-\frac{1}{2})>0$, m तथा n, r तथा s ऐसी संख्यायें हैं कि $0\leqslant m\leqslant 3$, $n>0$, $m+n\geqslant 2$, $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$.

ग्रन्त में $B=2$, $A=0$, $D=0$, $C=2$, $e_1=1-\frac{1}{2}\sigma$, $e_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma$ रखने पर

$$\int_0^\infty x^\sigma\, e^{-\lambda x} G^{2r,\ rn,\ 0,\ 4r,\ s}_{2r,\ [r(m+n):\ 0],\ 0,[r(m+n+2):\ 2s]}\left[\begin{matrix}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \\ \left(\frac{x}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(2r,\ -\mu-r/2s) \\ [\triangle(r,\ 1-a_n)],\ [\triangle(r,\ 1-a_m)]; \\ — \\ [\triangle,(b_4)],[\triangle(r,\ \beta_{m+n-2})];\ \triangle(s,\ \pm\frac{1}{2}\nu)]\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\lambda^{-\sigma}\,\pi^{-1/2}\,2^\sigma\,(2\pi)^{(1-s)}\,s^{\sigma-1/2}\left(\frac{np}{8r}\right)^{r/s}\ G^{2r,\ rn,\ 2s,\ 4r,\ s}_{2r,\ [r(m+n):\ 2s],\ 0,\ [r(m+n+2):2s]}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \left(\frac{4}{n}\right)^{sr} \\ \lambda^{-2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \triangle(2r, -\mu+r/s) \\ [\triangle(r, 1-a_n)], [\triangle(r, 1-a_m)]; \triangle(2s, \sigma) \\ - \\ [\triangle(r, b_4)], [\triangle(r, \beta_{m+n-2})]; \triangle(s, \tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\nu) \end{matrix} \right)$$

प्राप्त होगा क्योंकि $R(\lambda)>0$, $R(p)>0$, $R(\nu+1)>0$, $R(\sigma+1)>0$, $R(\mu+r/2s+r/s\,\nu+2\min b_j+1)>0$.

नीचे प्रमेय (3·1) की कतिपय विशिष्ट दशायें दी हुई हैं।

प्रमेय I(a) : जब $n=2$, $m=0$, $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=1$, $b_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda$, $b_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lambda$, $b_3=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda$, $b_4=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\lambda$ तथा (3·1) में p को $2p$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर और तब (2·2) का सम्प्रयोग $\beta=\gamma=0$ $\alpha=1$, $\delta=2$, $\epsilon=\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{r}{4s}$, $f_1=\frac{\nu}{2}$, $f_2=-\frac{\nu}{2}$, $y=\left(\frac{x}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}$ रख कर करने पर हमें राठी[10] द्वारा दी गई प्रमेय प्राप्त होती हैं।

उपप्रमेय : $r=s=1$, होने पर भोंसले[2] का प्रसिद्ध फल प्राप्त होगा।

प्रमेय I(b) : यदि हम (3·1) में $n=4$, $m=0$, $a_r=\beta_r(r=1,\ 2)$, $a_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\lambda$, $a_4=1+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\lambda$, $b_1=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda$, $b_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda$, $b_3=-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda$ $b_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda$ रखें और फिर $\beta=\gamma=0$, $\alpha=1$, $\delta=2$, $\epsilon=\frac{1}{2}\mu+r/4s+\frac{1}{2}$, $f_1=\frac{1}{2}\nu$, $f_2=-\frac{1}{2}\nu$, $y=\left(\frac{x}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}$ रख कर (2·3) का व्यवहार करें तो हमें निम्नांकित प्रमेय प्राप्त होगी :

यदि $\psi(p) \overset{W}{\underset{\lambda,\,k,\,m}{=}} t^{\mu} f(t^{r/s})$

तथा $\phi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(t)$

तो $\psi(p)=(2r)^{\mu+r/2s+\lambda+k+1/2}\,(2\pi)^{1/2-r}\,p^{-\mu-r/2s-1}$

$$\times \int_0^\infty x^{1/2}\,\phi(x)\,G^{s,\ 4r}_{4r,\ s+2r}\left[\left(\frac{x}{2s}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r} \middle| \begin{matrix} \triangle(2r, -\mu-r/2s\mp m-\lambda) \\ \triangle(s, \pm\frac{1}{2}\nu),\ \triangle(2r, -\mu-r/2s-\lambda+h) \end{matrix}\right] dx \tag{3·13}$$

वैधता की शर्तें वही हैं जो प्रमुख फल में उचित प्रतिस्थापन के अनन्तर होंगी।

उपप्रमेय : यदि (3·13) में $r=s=1$, $\lambda=k$ रखें तो सिंह[14] की प्रमेय प्राप्त होगी।

4. **प्रमेय :** यदि

$$\psi(p) \underset{n,m}{\overset{G}{=\!=}} t^{\mu} f(t^{-r/s})$$

तथा

$$\phi(p) \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(t)$$

तो

$$\psi(p) = \left(\frac{8r}{np}\right)^{\mu - r/2s + 1} (2\pi)^{(1-r)(4-m)-1/2} (2r)^{-1/2}\, r^{\Sigma b_j + \Sigma\beta_j - \Sigma a_j - \Sigma\alpha_j}$$

$$\times \int_0^\infty x^{1/2}\,\phi(x)\, G^{2r,\, rn,\, 0,\, 4r,\, s}_{2r,[r(m+n):\,0],\, 0,\, [r(m+n+2):\, 2s]}$$

$$\left[\begin{matrix} \left(\frac{4}{n}\right)^{2r} \\ \\ \left(\frac{2s}{x}\right)^{2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r} \end{matrix}\left|\begin{matrix} \triangle(r, -\tfrac{1}{2}\mu + r/4r),\ \triangle(r, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mu + r/4s) \\ [\triangle(r, 1-a_n)],\ [\triangle(r, 1-\alpha_m)];\ \triangle(s, \pm\tfrac{1}{2}\nu) \\ - \\ [\triangle(r, b_4)],\ [\triangle(r, \beta_{m+n-2})];- \end{matrix}\right.\right] dx \tag{4·1}$$

यदि m, n, r तथा s ऐसी अनृण पूर्ण संख्यायें हों कि $m+n \geqslant 2$, $0 \leqslant m \leqslant 3$, $n > 0$, $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $R(\mu - r/2s + 2\min b_j - r/s\ \nu + 1) > 0$, $R(\mu - r/s\ \rho + 2\min b_j + 1) > 0$, यदि $f(t) \sim t^{\rho}$ t लघु मान के लिए $R(p) > 0$, $R(\alpha) > 0$ यदि $f(t) \sim e^{-\alpha t} t^{\sigma}$ t उच्चमान के लिये तथा $|x^{1/2}\ \mathcal{J}_\nu(t^{-r/s} x)\ \phi(x)| \in L(0, \infty)$.

उपपत्ति : इस प्रमेय की उपपत्ति प्रमेय 1 की ही भाँति है ।

उदाहरण : यदि

$$f(t) = t^{-1/2}\ G^{A\ B}_{C\ D}\left(\lambda t^2 \middle| \begin{matrix}(e_C) \\ (f_D)\end{matrix}\right)$$

$$\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} G^{A,\ B+1}_{C+2,\ D}\left(\frac{4\lambda}{p^2} \middle| \begin{matrix}\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\nu,\ (e_C),\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\nu \\ (f_D)\end{matrix}\right)$$

$$= \phi(p)$$

अभिकल्पना से

$$\psi(p) \underset{n,m}{\overset{G}{=\!=}} t^{\mu} f(t^{-r/s})$$

जिसमें (2·1) के सम्प्रयोग से हमें निम्नांकित फल प्राप्त होगा :—

$$\psi(p)=\left(\frac{8r}{np}\right)^{\mu+1+r/2s}(2\pi)^{(1-r)(4-m)-1/2}(2\pi)^{(1-s)(A+B-1/2C-1/2D)}$$

$$\times(2r)^{-1/2}s^{1/2C-1/2D+\Sigma f_j-\Sigma e_j+1}\;r^{\Sigma b_j+\Sigma\beta_j-\Sigma a_j-\Sigma\alpha_j}G^{2r,\,rn,\,sA,\,4r,\,sB}_{2r,\,[r(m+n):\,sD],\,0,\,[r,\,(m+n+2):\,0]}$$

$$\left[\begin{array}{l|l}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} & \triangle(2r,\,-\mu-r/2s) \\ & [\triangle(r;1-a_n)],[\triangle(r,\,1-\alpha_m)];\;[\triangle(s,f_D)] \\ \left(\frac{s^{D-C}}{\lambda}\right)^{s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r} & - \\ & [\triangle(r,\,b_4)],[\triangle(r,\,\beta_{m+n-2})];\;[\triangle(s,\,1-e_C)]\end{array}\right] \tag{4·2}$$

इस प्रमेय से तथा (4·2) से $\psi(p)$ के दोनों मानों की तुलना करने पर प्राचलों में तनिक हेर-फेर करने से हमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त होगा

$$\int_0^\infty G^{B\,A}_{D\,C}\left(\frac{x^2}{4\lambda}\middle|\begin{matrix}(1-f_D)\\(1-e_C)\end{matrix}\right)G^{2r,\,rn,\,s,\,4r,\,0}_{2r,\,[r(m+n):\,2s],\,0,\,[r(m+n+2):\,0]}$$

$$\left[\begin{array}{l|l}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} & \triangle(2r,\,-\mu+r/2s) \\ & [\triangle(r,\,1-a_n)],[\triangle(r,\,1-\alpha_m)];\;\triangle(s,\pm\frac{1}{2}\nu) \\ \left(\frac{2s}{x}\right)^{2s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r} & - \\ & [\triangle(r,\,b_4)],[\triangle(r,\beta_{m+n-2})];-\end{array}\right]dx$$

$$=\left(\frac{8r}{np}\right)^{r/s}(2\pi)^{(1-s)(A+B-1/2C-1/2D)}s^{\Sigma f_j-\Sigma e_j+1/2C-1/2D}G^{2r,\,rn,\,s,(A+1),\,4r,\,sB}_{2r,\,[r(m+n),\,s(D+2)],\,0,\,[r(m+n+2):\,sC]}$$

$$\left[\begin{array}{l|l}\left(\frac{4}{n}\right)^{2r} & \triangle(2r,\,-\mu-r/2s) \\ & [\triangle(r,\,1-a_n)],[\triangle(r,\,1-\alpha_m)];\;\triangle(s,\,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu),[\triangle(s,f_D)],\;\triangle(s,\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\nu) \\ \left(\frac{s^{D+2-C}}{\lambda}\right)^{s}\left(\frac{8r}{np}\right)^{2r} & - \\ & [\triangle(r,\,b_4)],[\triangle(r,\,\beta_{m+n-2})];\;[\triangle(s,\,1-e_C)]\end{array}\right]$$

यदि $R(p)>0$, $2(B+A)>D+C$, $|\arg\lambda|<(A+B-\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}D)\pi$, m, n, r तथा ऐसी अनृण पूर्ण संख्यायें हैं कि $0\leqslant m\leqslant 3$, $n>0$, $m+n\geqslant 2$, $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$, $R(\nu+1)>0$, $R(\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}-e_j)>0$, $R(\mu-r/2s-r/s\,\nu+2\min b_j+1)>0$, $R(\mu+r/2s+2\min b_j-2r/s\,f_j+1)>0$

प्रमेय II(a) : जब $n=2$, $m=0$, $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=1$, $b_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda$, $b_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lambda$ $b_3=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda$, $b_4=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\lambda$ तथा (4·1) में p को $2p$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर तथा फिर $\beta=1$, $\alpha=0$, $\gamma=2$, $\delta=0$, $e_1=1-\frac{1}{2}\nu$, $e_2=1+\frac{1}{2}\nu$, $y=\left(\frac{2s}{x}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}$ रख कर (2·2) को व्यवहृत करके राठी[10] की प्रमेय प्राप्त करेंगे।

उपप्रमेय : $r=s=1$, रखने पर वर्मा[15] की प्रमेय प्राप्त होगी।

प्रमेय II(b) : (4·1) में $n=4,\ m=0,\ a_r=\beta_r\ (r=1, 2),\ a_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\lambda,$ $a_4=1+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\lambda,\ b_1=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda,\ b_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda,\ a_3=-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda,\ b_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\lambda$ रखने पर तथा $\beta=1,\ \gamma=2,\ \alpha=0,\ \delta=0,\ e_1=1-\frac{\nu}{2},\ e_2=1+\frac{\nu}{2},\ y=\left(\frac{2s}{x}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2s}$ मानने पर, (2·3) के उपयोग से निम्नांकित प्रमेय प्राप्त होगी :

यदि $$\psi(p)\ \overline{\overline{\lambda, k, m}}^{W}\ t^{\mu} f(t^{-r/s})$$

तथा $$\phi(p)\ \underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}\ f(t)$$

तो $$\psi(p)=(2r)^{\mu-r/2s+\lambda+k+1/2}\ (2\pi)^{1/2-r}\ p^{-\mu+r/2s-1}$$

$$\times\int_0^\infty x^{1/2}\,\phi(x)\,G^{0,\ s+4r}_{2s+4r,\ 2r}\left[\left(\frac{2s}{x}\right)^{2s}\left(\frac{2r}{p}\right)^{2r}\middle|\begin{matrix}\triangle(s, 1\pm\frac{1}{2}\nu),\ \triangle(2r, -\mu+r/2s\mp m-\lambda)\\ \triangle(2r,\ -\mu+r/2s+k-\lambda)\end{matrix}\right]dx$$

वैधता को शर्तें वही हैं जो मुख्य फल में उचित प्रतिस्थापन के अनन्तर होंगी।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० के० सी० शर्मा के प्रति आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०। — **प्रोसी० नेश० इस्टी० साइंस (इंडिया)**, 1965, **31**, 536-46.
2. भोंसले, बी० आर०। — **प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसो०**, 1962, **5**, 114-15.
3. एर्डेल्यी, ए०। — Higher Transcendental Functions, **भाग** II, **मैकग्राहिल**, 1953.
4. वही। — Tables of Integral Transforms. **भाग** II, **मैकग्राहिल** 1954.
5. गुप्ता, एस० सी०। — **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया) में प्रकाशनार्थ प्रेषित.**
6. वही। — **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका में प्रकाशनार्थ प्रेषित.**

7. माइजर, सी० एस० । Proc. Kon. Neder. Akad. v wet, 1946 **49**, 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175.

8. वही । वही 1940, **44**, 599-608.

9. वही । वही 1941, **44**, 727-37.

10. राठी, पी० एन० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1964, **34**, 501-506.

11. शर्मा, बी० एल० । Annal. de la Soc.Sc., Bruxelles, 1965, **79**, 26-40.

12. शर्मा, के० सी० । **मैथ० जाइट०**, 1965, **89**, 94-97.

13. वही । **प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसो०**, 1963, **6**, 107-112.

14. सिंह, एस० पी० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1962, **32**, 355-59.

15. वर्मा, सी० बी० एल० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस, (इंडिया)**, 1961, **30**, 102-107.

16. वर्मा, आर० एस० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 151, **20**, 209-216.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No 3, July 1970, Pages 129-138

H-फलन का इसके प्राचलों के सापेक्ष समाकलन

आशा पेंडसे
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—फरवरी 21, 1969]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में कतिपय समाकल प्राप्त किये गये हैं जिनमें फाक्स के H-फलन को क्रियात्मक कलन की विधि द्वारा इसके प्राचलों के सापेक्ष समाकलित किया गया है ।

Abstract

Integration of H-function with respect to its parameters. *By* Asha Pendse, Department of Mathematics, Rajasthan University, Jaipur.

In this paper certain integrals have been obtained where Fox's H-function has been integrated with respect to its parameters, by the method of operational calculus.

1. मैकराबर्ट[4], रागव[5], स्लेटर[6], वर्मा[7] द्वारा कतिपय समाकल प्राप्त किये गये हैं जिनमें E-फलन अथवा हाइपरज्यामितीय फलन अथवा द्विपार्श्विक हाइपरज्यामितीय फलन को उनके प्राचलों के सापेक्ष समाकलित किया गया है । प्रस्तुत शोधपत्र में फाक्स के H-फलन सम्बन्धी वैसे ही समाकलों का मान ज्ञात किया गया है । इन समाकलों को एक प्रमेयिका तथा उसकी उपप्रमेयिका के सम्प्रयोग द्वारा प्राप्त किया गया है ।

यह प्रमेयिका मेलिन परिवर्त में

$$M[f(x) : s]=\int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx \tag{1·1}$$

तथा सक्सेना[8] द्वारा पारिभाषित गास के हाइपरज्यामितीय फलन परिवर्त में

$$H_{a,\, b\,:\, c}[f(x) : y]= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\int_0^\infty {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix}\ ; -x/y\right) f(x)dx \tag{1·2}$$

फलन के बिम्बों के मध्य सम्बन्ध अंकित करती है।

(1·2) द्वारा पारिभाषित संकारक (Operator) विख्यात स्टाइल्जे परिवर्त का सार्वीकरण है

$$G_f[f(x) : y] = \int_0^\infty (x+y)^{-\rho} f(x)\, dx \tag{1·3}$$

तथा हमें

$$H_{a,b} : {}_b[f(x) : y] = \Gamma(a)\, y^a\, G_a[f(x) : y] \tag{1·4}$$

प्राप्त होता है। इस शोधपत्र में निम्नांकित सांकेतिक चिन्हों का प्रयोग किया जावेगा

$$(a_r) = a_1, a_2, \ldots, a_r \tag{1·5}$$

$$(a_r, e_r) = (a_1, e_1), (a_2, e_2), \ldots, (a_r, e_r). \tag{1·6}$$

$$\triangle(n, a) = \frac{a}{n}, \frac{a+1}{n}, \ldots, \frac{a+n-1}{n} \tag{1·7}$$

तथा λ और δ निम्नांकित मात्राओं के लिए क्रमशः प्रयुक्त होंगे

(i)
$$\sum_1^l (e_j) - \sum_{l+1}^r (e_j) + \sum_1^k (f_j) - \sum_{k+1}^s (f_j) \tag{1·8}$$

(ii)
$$\sum_1^s (f_j) - \sum_1^r (e_j) \tag{1·9}$$

2. **निम्नांकित फलों की आवश्यकता होगी**

(i) एर्डेल्यी [1, p. 62 (15)]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} \left(\frac{x}{y}\right)^s ds = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; -x/y\right) \tag{2·1}$$

(ii) एर्डेल्यी [2, p. 400, (9)]

$$\int_0^\infty x^{\gamma-1} (1+x)^{-\sigma}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; -x\right) dx = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\gamma-\sigma)\,\Gamma(\beta-\gamma+\sigma)}{\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+\sigma)} \tag{2·2}$$

(iii) एर्डेल्यी [2, p. 399, (3)]

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(x+y)^{\beta-\rho-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a, \beta\\ \gamma\end{matrix}; x\right)dx$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\rho)\,\Gamma(\beta-\rho)\Gamma(\gamma-a-\rho)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-a)\,\Gamma(\gamma-\rho)} \tag{2·3}$$

(iv) एर्डेल्यी [2, p. 233, (8)]

$$\int_0^\infty x^{\nu-1}\,(x+y)^{-\rho}\,dx=\frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho-\nu)}{\Gamma(\rho)}\,y^{\nu-\rho} \tag{2·4}$$

तथा सुप्रसिद्ध फल

$$(2\pi)^{1/2-1/2n}\,n^{nz-1/2}\prod_{t=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{t}{n}\right)=\Gamma(nz) \tag{2·5}$$

जिससे यह व्युत्पन्न किया जा सकता है कि किसी धन पूर्णांक n के लिए

$$\Gamma(a+nz)=(2\pi)^{1/2-1/2n}\,n^{a+nz-1/2}\prod_{t=0}^{n-1}\Gamma\left(\frac{a+t}{n}+z\right) \tag{2·6}$$

तथा

$$\Gamma(a-nz)=(2\pi)^{1/2-1/2n}\,n^{a-nz-1/2}\prod_{t=0}^{n-1}\Gamma\left(\frac{a+t}{n}-z\right) \tag{2·7}$$

यहाँ H फलन की जो परिभाषा दी गई है वह फाक्स द्वारा[3] दी गई परिभाषा से कुछ भिन्न है। हम पारिभाषित करेंगे कि

$$H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z\left|\begin{matrix}\{a_p, c_p\}\\ \{b_q, f_q\}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_j\xi)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_j\xi)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_j\xi)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_j\xi)}\,x^\xi\,d\xi \tag{2·8}$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को 1, $0<m<q$, $0<n<p$, के रूप में माना जावेगा; सभी c तथा f धन हैं, L बार्नीज़ कोटि का उपयुक्त कंटूर है जिससे कि $\Gamma(b_j-f_j\xi)$; $j=1, 2, \ldots, m$ के पोल इसके दाईं ओर स्थित हों तथा $\Gamma(1-a_j+e_j\xi)$; $j=1, 2,\ldots, n$ के पोल इसके बाईं ओर हों। यही नहीं, प्राचल इस प्रकार सीमाबद्ध हैं कि (2·8) के दाहिनी ओर का समाकल अभिसारी है।

3. प्रमेयिका

यदि $x^{\rho-1}f(x)\in L\,(0, \infty)$, $R(a)>0$, $R(b)>0$ तथा $|\arg y|<\pi$, तो

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(a+\xi)\ \Gamma(b+\xi)\ \Gamma(-\xi)}{\Gamma(c+\xi)}y^{-\xi}\ M\Big[f(x)\ :\ \xi+\rho\Big]\,d\xi$$

$$=H_{a,\ b\ :\ c}\,[x^{\rho-1}f(x)\ :\ y] \tag{3·1}$$

जहाँ कंटूर समस्त काल्पनिक अक्ष है जिसके मूलबिन्दु पर दंतुरता है जिससे कि यह कंटूर के दाहिनी ओर रहता है। यह फल तब भी सही होगा जब $|\arg y|=\pi$, यदि $R(a+b)<R(c)$.

उपपत्ति

फल (3·1) की प्राप्ति सम्बन्ध (2·1) में दोनों ओर $x^{\rho-1}f(x)$ से गुणा करने तथा x के सापेक्ष समाकलित करने, समाकलन की सीमाओं को 0 तथा ∞ लेने पर तथा बाईं ओर समाकलन के क्रम को बदलने पर जो कि विहित है, होती है।

उपप्रमेय : यदि (3·1) में $b=c$ रखें को यह घटित होती है मानों

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(a+\xi)\ \Gamma(-\xi)\,y^{-\xi-a}\,M[f(x)\ :\ \xi+\rho[\ d\xi$$

$$=\Gamma(a)\ M[(x+y)^{-a}f(x)\ :\ \rho] \tag{3·2}$$

4. समाकल

प्रथम समाकल जिसका मान ज्ञात करना है वह है कि यदि $R(d)>\epsilon>0$, $R(a+c)>0$, $R(b+c)>0$, $R(a-d)>0$, $R(b+d)>0$, $R(a+b+c+d)>0$ $R(\alpha)>0$, $R(\beta)\overline{>0}$ तथा $\left|\frac{z}{(x+y)^n}\right|<\lambda\pi$, तो

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\ \Gamma(b+\xi)\ \Gamma(c-\xi)n^{-\xi}\,H^{k,\ l+n}_{r+n,\ s}\left[z\left|\begin{matrix}\{\triangle(n,\ 1-d+\xi),\ 1\},\ \{a_r,\ e_r\}\\ \{b_s,\ f_s\}\end{matrix}\right.\right]d\xi$$

$$=\Gamma(a+c)\ \Gamma(b+c)n^{-c}\ H^{k,\ l+2n}_{r+2n,\ s+n}\left[x\left|\begin{matrix}\{\triangle(n,\ 1-a-d),\ 1\}\{\triangle(n,\ 1-b-d),\ 1\},\{a_r,e_r\}\\ \{b_s,\ f_s\},\ \{\triangle(n,\ 1-a-b-c-d),\ 1\}\end{matrix}\right.\right] \tag{4·1}$$

यदि $\lambda>0$, $\delta\geqslant0$ तथा $\alpha=\min\ R(b_h/f_h)$, $h=1,\ldots,k$; $\beta=\max\ R\left(\frac{a_i-1}{e_i}\right)$; $i=1,\ldots,l$.

उपपत्ति

यदि हम (3·1) में

$$f(x)=x^{c-\rho}\,(x+y)^{-d}\ H^{k,\ l}_{r,s}\left[z(x+y)^{-n}\left|\begin{matrix}\{a_r,\ c_r\}\\ \{b_s,f_s\}\end{matrix}\right.\right] \tag{4·2}$$

लें और फल (2·8) से समाकल्य में H-फलन का मान रखें, तब $M[f(x): \xi+\rho]$ का मान फल (2·4), (2·5) तथा (2·7) की सहायता से निकालने पर जब कि $H_{a,\,b:\,c}\,[x^{\rho-1}f(x):y]$ का मान (2·2), (2·6) तथा (2·7) की सहायता से समाकलन के क्रम को बदल कर प्राप्त किया जाता है जो कि न्यायसंगत है, हमें वांछित फल प्राप्त होगा यदि ξ को $\xi-c$ द्वारा प्रतिस्थापित करें तथा अन्य प्राचलों में वैसे ही परिवर्तन पहले से कर लें।

विशिष्ट दशायें :

यदि हम समस्त e तथा f को इकाई के बराबर मान लें तो हमें निम्नांकित समाकल प्राप्त होगा

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(b+\xi)\,F(c-\xi)n^{-\xi}\,G^{k,\,l+n}_{r+n,\,s}\left(z\middle|\begin{matrix}\triangle(n,\,1-d+\xi),\,(a_r)\\(b_s)\end{matrix}\right)d\xi$$
$$=\Gamma(a+c)\,\Gamma(b+c)n^{-c}\,G^{k,\,l+2n}_{r+2n,\,s+n}\left(z\middle|\begin{matrix}\triangle(n,\,1-d-a),\,\triangle(n,\,1-d-b),\,(a_r)\\(b_s),\,\triangle(n,\,1-a-b-c-d)\end{matrix}\right) \quad (4\cdot3)$$

यदि हम $k=1,\ s=q+1,\ 1=r=p,\ b_1=0,\ b_{j+1}=1-\beta j,\ a_i=1-a_i$ रखें तथा समस्त e एवं f को इकाई के बराबर मान लें तो

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(b+\xi)\,\Gamma(c-\xi)n^{-\xi}\,E\left[\begin{matrix}\triangle(n,\,d-\xi),\,a_p)\\(\beta_q)\end{matrix}:z\right]d\xi$$
$$=\Gamma(a+c)\,\Gamma(b+c)n^{-c}\,E\left[\begin{matrix}\triangle(n,\,d+a),\,\triangle(n,\,d+b),\,a_p)\\(\beta_q),\,\triangle(n,\,a+b+c+d)\end{matrix}:z\right] \quad (4\cdot4)$$

प्राप्त होगा।

यदि हम $n=1,\ k=s=p,\ 1=0,\ d=0,\ r=q$ मानें तथा समस्त e एवं f को इकाई के बराबर तो हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(b+\xi)\,\Gamma(c-\xi)z^{\xi}\,\,E\left[\begin{matrix}a_1-\xi,\,a_2-\xi,\,\ldots,\,a_p-\xi\\b_1-\xi,\,\ldots,\,b_q-\xi\end{matrix}:z\right]d\xi$$
$$=\Gamma(a+c)\,\Gamma(b+c)\,\sum_{a,b}\frac{\operatorname{cosec}(a-b)\pi}{\operatorname{cosec}(a+c)\pi}\left[\begin{matrix}1-a-c,\,a_1+b,\,\ldots,\,a_p+b\\1+b-a,\,b_1+c,\,\ldots,\,b_q+c\end{matrix}:z\right] \quad (4\cdot5)$$

प्राप्त होगा।

$n=1$ होने पर हमें रागब[5] द्वारा दिया गया फल प्राप्त होगा यदि सभी e तथा f इकाई के तुल्य हों।

समाकल 2 :

द्वितीय समाकल जिसका मान ज्ञात करना है वह है यदि $R(b-1)>\epsilon>0,\ R(1+b-d)>\epsilon>0,$

$R(c-a)>0$' $R(c+d-1)>R(a+b)>0$, $R(\alpha)>0$, $R(\beta)>0$ तथा $\left|z\left(\frac{x}{1-x}\right)^n\right|<\frac{1}{2}\lambda\pi$,
तो

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\frac{\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(b-\xi)}{\Gamma(c+\xi)}\;e^{\pm i\pi\xi}H_{r+n,s}^{k,\,l+n}\left[z\left|\begin{matrix}\{\triangle(n,\,d-\xi),\,1\},\,\{a_r,\,e_r\}\\\{b_s,f_s\}\end{matrix}\right.\right]d\xi$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(c-a)}\;n^{-(a+b)}\;e^{i\pi b}\,H_{r+2n,\,s+n}^{k+n,\,l+n}\left[z\left|\begin{matrix}\{\triangle(n,\,d-b),\,1\},\,\{a_r,\,c_r\},\,\{\triangle(n,\,c+d),\,1\}\\\{\triangle(n,\,c+d-a-b-1),\,1\},\,\{b_s,f_s\}\end{matrix}\right.\right] \tag{4·7}$$

यदि $\lambda>0$, $\delta\geqslant0$ तथा $\alpha=\min\,R\left(\frac{bh}{fh}\right)$, $h=1,\,\dots\,k$ तथा $\beta=\max\,R\left(\frac{a_i-1}{e_i}\right)$; $i=1,\,\dots,\,l$.

उपपत्ति

यदि हम (3·1) में

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)^{b-\rho-1}\,H_{r,\,s}^{k,\,l}\left[zx^n(1-x)^n\left|\begin{matrix}\{a_r,\,c_r\}\\\{b_s,f_s\}\end{matrix}\right.\right] & \text{जब } 0<x<1\\ 0 \text{ जब } 1<x<\infty\end{cases} \tag{4·8}$$

लें और फल (2·8) से समाकल्य में H-फलन का मान रखें और फिर $M[f(x):\xi+\rho]$ तथा $H_{a,\,b:\,c}[x^{\rho-1}f(x):y]$ का मूल्यांकन (2·3) (2·6) तथा (2·7) फलों की सहायता से समाकलन के क्रम को बदलकर करें तो हमें वांछित फल की प्राप्ति होगी यदि पहले ξ को $\xi-c$ द्वारा प्रतिस्थापित करके अन्य प्रचालों में भी वैसे ही परिवर्तन कर दें।

विशिष्ट दशायें

यदि हम समस्त e तथा f को इकाई के बराबर रखें तो हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\frac{\Gamma(a+\xi)\Gamma(b-\xi)}{\Gamma(c+\xi)}\;e^{\pm i\pi\xi}\,G_{r+n,\,s}^{k,\,l+n}\left(z\left|\begin{matrix}\triangle(n,\,d-\xi),\,(a_r)\\(b_s)\end{matrix}\right.\right)d\xi$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(c-a)}\;n^{-(a+b)}\;e^{i\pi b}\,G_{r+2n,\,s+n}^{k+n,\,l+n}\left(z\left|\begin{matrix}\triangle(n,\,d-b),\;(a_r),\;\triangle(n,\,c+d)\\\triangle(n,\,c+d-a-b-1),\,(bs)\end{matrix}\right.\right) \tag{4·9}$$

यदि हम $n=1$ रखें तथा $1=0$, $k=s=p$, $r=q$, $b=d=0$, समस्त e तथा f को इकाई के बराबर मानें तो हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon=i\infty}^{\epsilon+i\infty}\frac{\Gamma(c+\xi)\Gamma(-\xi)}{\Gamma(c+\xi)}\;e^{\pm i\pi\xi}\,.\,z^{-\xi}\;E\left[\begin{matrix}a_1+\xi,\,\dots,\,a_p+\xi\\b_1+\xi,\,\dots,\,b_q+\xi\end{matrix}:z\right]d\xi$$

$$=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)}\;E\left[\begin{matrix}c-a,\,a_1,\,\dots,\,a_p\\b_1,\,\dots\,b_q\end{matrix}:z\right] \tag{4·10}$$

प्राप्त होगा।

5. समाकल 3

तृतीय समाकल जिसका मूल्यांकन करना है : वह है यदि $R(b+d)>\epsilon>0$, $R(c-b)>\epsilon>0$, $R(a+b)>0$, $R(c+d)>0$, $R(a+c)>0$, $R(b)>0$, $R(\alpha)>0$, $R(\beta)>0$, तथा $|zx^n|<\frac{1}{2}\lambda\pi$ तो

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \Gamma(a+\xi)\Gamma(b-\xi)\; H_{r+n,\; s+n}^{k+n,\; l+n}\left[z\begin{matrix}\{\triangle(n, 1-d-\xi), 1\}, \{a_r, c_r\}\\ \{\triangle(n, c-\xi), 1\}, \{b_s, f_s\}\end{matrix}\right]d\xi$$

$$=\frac{\Gamma(a+b(\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}\, n^{a+b}\, H_{r+n,\; s+n}^{k+n,\; l+n}\left[z\left|\begin{matrix}\{\triangle(n, 1-d-b), 1\}, \{a_r, e_r\}\\ \{\triangle(n, c+a), 1\}, \{b_s, f_s\}\end{matrix}\right.\right] \tag{5·1}$$

यदि $\lambda>0$, $\delta\geqslant0$ तथा $\alpha=\min\, R\left(\frac{b_h}{f_h}\right)$, $h=1, \ldots, k$; $\beta=\max R\left(\frac{a_i-1}{e_i}\right)$; $i=1, \ldots, l$.

उपपत्ति

यदि हम (3·2) में

$$f(x)=(x+y)^{-c-d}\;\; H_{r,\; s}^{k,\; l}\left[zx^n\left|\begin{matrix}\{a_r, c_r\}\\ \{b_s, f_s\}\end{matrix}\right.\right] \tag{5·2}$$

रखें तथा (2·8) फल में से समाकल्य में H-फलन के लिये प्रतिस्थापन करें और फिर (2·4), (2·6) तथा (2·7) फलों की सहायता से समाकलन के क्रम को बदलने के पश्चात् मान निकालें तो वांछित फल की प्राप्ति होगा यदि पहले ही ξ को $\xi-b$ के द्वारा तथा अन्य प्राचलों में वैसे ही परिवर्तन कर दें।

विशिष्ट दशायें

यदि सभी e तथा f इकाई के तुल्य हों तो हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\;\; \triangle(b-\xi)\; G_{r+n,\; s+n}^{k+n,\; l+n}\left(z\left|\begin{matrix}\triangle(n, 1-d-\xi), (a_r)\\ \triangle(n, c-\xi), (b_s)\end{matrix}\right.\right)d\xi$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)\;\Gamma(c+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}\; n^{a+b}\, G_{r+n,\; s+n}^{k+n,\; l+n}\left(z\left|\begin{matrix}\triangle(n, 1-d-b), (a_r)\\ \triangle(n, c+a), (b_s)\end{matrix}\right.\right) \tag{5·3}$$

प्राप्त होगा। यदि सभी e तथा f इकाई के तुल्य हों तो यदि हम $n=1$, $k=s=p$, $r=q$, $d=0$, $1=0$, $b_j=\alpha_j$ तथा $a_i=\beta_i$, लें तो हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon i+\infty}\Gamma(a+\xi)\Gamma(b-\xi)\; z^{-\xi}\; E\left[\begin{matrix}c, \alpha_1+\xi, \ldots, \alpha_p+\xi\\ \beta_1+\xi, \ldots, \beta_q+\xi\end{matrix} : z\right]d\xi$$

$$=\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}\, z^{-b}\, E\left[\begin{matrix}a+b+c, \alpha_1+b, \ldots, \alpha_p+\xi\\ \beta_1+b, \ldots, \beta_q+b\end{matrix} : z\right] \tag{5·4}$$

प्राप्त होगा । यदि आगे हम (5·4) में $b=0$ रखें तो मैकराबर्ट[4] द्वारा दिया हुआ समाकल प्राप्त होगा ।

समाकल 4 तथा 5

यदि हम $f(x)\ x^{\beta-\rho}\ (x+y)^{-\alpha-\beta}\ H_{r,\ s}^{k,\ l}\left[\ zx^{j-i}\ (x+y)^{i}\left|\begin{matrix}\{a_r,\ e_r\}\\ \{a_s, f_s\}\end{matrix}\right.\right]$ (5·5)

लें जहाँ i तथा j दोनों ही धन पूर्णांक हों तो (2·4), (2·6) तथा (2·7) फलों के बल पर फल (3·2) से निम्नांकित की प्राप्ति होगी यदि हम मान लें कि $j=m+n, i=m$; m तथा n दोनों धन पूर्णांक हैं तथा ξ को $\xi-b$ द्वारा प्राचलों में उपयुक्त हेर-फेर करके प्रतिस्थापित कर दें ।

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(b-\xi)\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-\xi}$$
$$\times H_{r+n,\ s+m+n}^{k+m+n,\ l+n}\left[z\left|\begin{matrix}\{\triangle(n,\ 1-c-\xi),\ 1\},\ \{a_r,\ c_r\}\\ \{\triangle(m+n,\ d-\xi),\ 1\},\ \{b_s, f_s\}\end{matrix}\right.\right]d\xi$$
$$=\Gamma(a+b)\cdot\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-b}\left(\frac{m}{n}\right)^{-a-b}$$
$$\times H_{r+m+n,\ s+2m+n}^{k+2m+n,\ l+n}\left[z\left|\begin{matrix}\{\triangle(n,\ 1-c-b),\ 1\},\{a_r, e_r\},\{\triangle(m,a+b+c+d),\ 1\}\\ \{\triangle(m,\ c+d),\ 1\},\ \{\triangle(m+n,\ a+d),\ 1\},\{b_s, f_s\}\end{matrix}\right.\right] \tag{5·6}$$

किन्तु यदि हम मानें कि $j=n$, $i=m+n$ तो $i>j$ अत: इससे

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\ \Gamma(b-\xi)\left(\frac{m}{n}\right)^{\xi}\ H_{r,\ s+m+n}^{k+m+n,\ l}\left[z\left|\begin{matrix}\{a_r,\ c_r\}\\ \{\triangle(m,c+\xi),1\},\{\triangle(n,d-\xi),1\},\{b_s f_s\}\end{matrix}\right.\right]d\xi$$
$$=\Gamma(a+b)\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-a-b}\left(\frac{m}{n}\right)^{-b}$$
$$\times H_{r+m+n,\ s+2m+2n}^{k+2m+2n,\ l}\left[z\left|\begin{matrix}\{a_r,\ c_r\},\{\triangle(m+n,\ a+b+c+d),\ 1\}\\ \{\triangle(m+n),(c+d),\ \{\triangle(m,\ c+b),\ 1\},\ \{\triangle(n,\ a+d),\ 1\}\{b_s,\ f_s\}\end{matrix}\right.\right] \tag{5·7}$$

प्राप्त होगा ।

विशिष्ट दशायें

यदि सभी e तथा f इकाई के बराबर हों तो (5·6) तथा (5·7) क्रमशः

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(b-\xi)\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-\xi}\ G_{r+n,\ s+m+n}^{k+m+n,\ l+n}\left(z\left|\begin{matrix}\triangle(n,\ 1-c-\xi),\ (a_r)\\ \triangle(m+n,\ d-\xi),\ (b_s)\end{matrix}\right.\right)d\xi$$

$$=\Gamma(a+b)\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-b}\left(\frac{m}{n}\right)^{-a-b} G^{k+2m+n,\ l+n}_{r+m+n,\ s+2m+n}\left(z\left|\begin{matrix}\triangle(n,\ 1-c-b),\ (a_r)\ \triangle(m,\ a+b+c+d)\\ \triangle(m,\ c+d),\ \triangle(m+n,\ a+d),\ (b_s)\end{matrix}\right.\right) \tag{5·8}$$

एवं

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(b-\xi)\left(\frac{m}{n}\right)^{\xi} G^{k+m+n,\ l}_{r,\ s+m+n}\left(z\left|\begin{matrix}(a_r)\\ \triangle(m,\ c+\xi),\ \triangle(n,\ d-\xi),\ (b_s)\end{matrix}\right.\right)d\xi$$

$$=\Gamma(a+b)\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-a-b}\left(\frac{m}{n}\right)^{b}$$

$$G^{k+2m+2n,l}_{r+m+n,\ s+2m+2n}\left(z\left|\begin{matrix}(a_r),\ \triangle(m+n,\ a+b+c+d)\\ \triangle(m+n,\ c+d),\ \triangle(m,\ c+b),\ \triangle(n,\ a+d),(b_s)\end{matrix}\right.\right) \tag{5·9}$$

में घटित होंगे।

यदि हम (5·8) तथा (5·9) में $m=n=1$ रखें तो हमें क्रमशः

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\ \Gamma(b-\xi)2^{-\xi}\ G^{k+2,\ l+1}_{r+1,\ s+2}\left(z\left|\begin{matrix}1-c-\xi,\ (a_r)\\ \frac{1}{2}(d-\xi),\ \frac{1}{2}(d-\xi+1),\ (b_s)\end{matrix}\right.\right)d\xi$$

$$=\Gamma(a+b)2^{-b}\ G^{k+3,\ l+1}_{r+2,\ s+3}\left(z\ \begin{matrix}1-c-b,\ (a_r),\ a+b+c+d\\ c+d,\ \frac{1}{2}(a+d),\ \frac{1}{2}(a+d+1),\ (b_s)\end{matrix}\right) \tag{5·10}$$

तथा

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\ \Gamma(b-\xi)\ G^{k+2,\ l}_{r,\ s+2}\left(z\left|\begin{matrix}(a_r)\\ c+\xi,\ d-\xi,\ (b_s)\end{matrix}\right.\right)d\xi$$

$$=\Gamma(a+b)2^{-a-b}\ G^{k+4,\ l}_{r+2,\ s+4}\left(z\left|\begin{matrix}(a_r),\ \frac{1}{2}(a+b+c+d),\ \frac{1}{2}(a+b+c+d+1)\\ \frac{1}{2}(c+d),\ \frac{1}{2}(c+d+1);\ b+c,\ a+d,\ (b_s)\end{matrix}\right.\right) \tag{5·11}$$

प्राप्त होंगे। प्राचलों को उपयुक्त मान प्रदान करके यदि हम G फलन को E फलन में परिवर्तित कर दें तो उपर्युक्त समाकल (5·10) तथा (5·11) क्रमशः

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\ \Gamma(-\xi)(2z)^{-\xi}E\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(d+\xi),\ \frac{1}{2}(d+\xi+1),\ \alpha_1+\xi,\ \ldots,\ \alpha_p+\xi\\ \beta_1+\xi,\ \ldots\ \beta_q+\xi\end{matrix}:z\right]d\xi$$

$$=\Gamma(a+b)2^{-b}\,E\left[\begin{matrix}d,\ \frac{1}{2}(a+d),\ \frac{1}{2}(a+d+1),\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_p\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q,\ a+d\end{matrix}:z\right] \tag{5·12}$$

तथा

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\Gamma(a+\xi)\Gamma(b-\xi)\ E\left[\begin{matrix}c-\xi,\ d-\xi,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_p\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q\end{matrix}:z\right]d\xi$$

$$=2^{-a-b}\ .\ \Gamma(a+b)\quad E\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(c+d),\ \frac{1}{2}(c+d+1),\ b+c,\ a+d,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_p\\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q,\ \frac{1}{2}(a+b+c+d),\ \frac{1}{2}(a+b+c+d+1)\end{matrix}:z\right] \tag{5·13}$$

में घटित होंगे। यहीं नहीं, यदि हम फल (5·13) में $p=q$, $L_i=\beta_i$ रखें तो हमें रागव[5] द्वारा प्रदत्त फल प्राप्त होगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिका डा० के० सी० शर्मा के प्रति अपना आभार प्रकट करती है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में सहायता पहुँचाई ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Higher Transcendental Functions. **भाग** I, Bateman Manuscript Project, 1953.

2. वही । Tables of Integral Transforms. **भाग** II Bateman Manuscript Project, 1954.

3. फाक्स, सी० । **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **4**, 395-429.

4. मैकराबर्ट, टी० एम० । **प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसो०**, 1959, **4**, 84-87.

5 रागब, एफ० एम० । **वही**, 1957, 394-98.

6. स्लेटर, एल० जे० । **प्रोसी० कैम्बि० फिला० सोसा०**, 1955, **51**, 288-96.

7. वर्मा, ए० के० । **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1964, **39**, 673-84.

8. सक्सेना, आर० एस० । Annals. de la Soc. Sci. de Bruxelles, 1965.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 3 July 1970, Pages 139-143

तीन चरों वाली कतिपय हाइपरज्यामितीय श्रेणियों के योग

एल० के० भागचन्दानी तथा के० एन० मेहरा
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त--जुलाई 2, 1968]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में विभिन्न बिंदुओं पर पांडेय[5] द्वारा पारिभाषित G_A तथा G_B और श्रीवास्तव [7, p 38] द्वारा पारिभाषित H_B तथा H_C तीन चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों के योग प्राप्त किये गये हैं। $x=y=z=1$ पर सरन[6] द्वारा पारिभाषित F_N का भी मान प्राप्त किया गया है।

Abstract

On the sums of certain hypergeometric series of three variables. *By* L. K. Bhagchandani and K. N. Mehra, Department of Mathematics, University of Jodhpur.

In the present paper we obtain the sums of hypergeometric functions of three variables G_A and G_B defined by Pandey[5] and H_B, H_C defined by Srivastava [7, p. 38] at the various points. We have also obtained value of F_N defined by Saran[6] at $x=y=z=1$.

1. विभिन्न बिन्दुओं पर फलनों के योगों को निम्नांकित सूत्रों द्वारा प्राप्त किया गया है। एपेल [1, p. 22] ने दिखाया है कि

$$F_1(a, b, b'; c; 1, 1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-b')}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b-b')} \tag{1·1}$$

भट्ट [3, p. 84], ने सिद्ध किया है कि

$$F_2(-p, b, b'; 1+b-b'-p, c'; 1, 1)=\frac{(b-b'+c', p)(b', p)}{(c', p)(b'-b, p)} \tag{1·2}$$

जिसमें p एक घन पूर्णांक है।

बेली[2] से हमें

$$ {}_2F_1\{a, b; \tfrac{1}{2}(a+b+1); \tfrac{1}{2}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b)}{\Gamma(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}b)} \tag{1·3} $$

प्राप्त होगा।

2. इस अनुभाग में हम क्रमशः $4x=y=z=1$ तथा $x=y=z=1$, $-x=y=z=1$, $2x=z=1$ पर पाण्डेय [5] द्वारा पारिभाषित G_A तथा G_B के मानों को प्राप्त करेंगे। श्रीवास्तव [7, p. 38] द्वारा पारिभाषित तीन चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों, H_C का योग $x=y=z=1$ पर किया गया है।

यदि निम्नांकित पर विचार करें

$$ G_B(1/a, a, a, b_1, b_2, b_3; 1/c, c, c; x, y, z) $$

$$ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a, -m)(b_1, m)}{(1, m)(c, -m)} x^m F_1(a-m, b_2, b_3; y, z) $$

तो (1·1) के प्रयोग द्वारा हमें

$$ G_B(x, 1, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_2-b_3)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_2-b_3)} {}_2F_1(b_1, 1+b_2+b_3-c; 1-a; x) \tag{2·1} $$

प्राप्त होगा। अब [4, p. 104 (46), (47), 51)] तथा (1·3) के प्रयोग से तुरन्त ही

$$ G_B(1, 1, 1) = \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a-b_1-b_2-b_3)\Gamma(c)}{\Gamma(1-a-b_1)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_2-b_3)} \tag{2·2} $$

$$ G_B(-1, 1, 1) = 2^{-b_1} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c+b_1-b_2-b_3)\Gamma(2c+b_1-2b_2-2b_3-1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(c-b_2-b_3)\Gamma(2c+b_1-b_2-b_3-1)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b_1)\Gamma(c+\frac{1}{2}b_1-b_2-b_3)} \tag{2·3} $$

प्राप्त होगा, जहाँ $a=1+b_2+b_3-b_1-c$.

$$ G_B(\tfrac{1}{2}, 1, 1) = 2^a \frac{\Gamma(1-a)(\frac{1}{2})\Gamma(b_1-a)\Gamma(b_1+b_2+b_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma b_1+b_2+b_3-a)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2}a)\Gamma(1-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b_1)} \tag{2·4} $$

जहाँ $c=b_1+b_2+b_3$.

तथा

$$ G_B(\tfrac{1}{2}, 1, 1) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})(c)\Gamma(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}b_3)\Gamma(1+\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{2}b_3-\frac{1}{2}c)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b_1)\Gamma(1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{2}b_3-\frac{1}{2}c)\Gamma(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{2}b_3)} \Gamma(c-b_2-b_3) \tag{2·5} $$

जहाँ $a=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2-\frac{1}{2}b_3$.

अब

$$G_A(1/a, a, a, b, b', b; 1/c, c, c; x, y, z)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a, -m)(b, m)}{(1, m)(c, -m)}\, x^m F_1(a-m, b', b+m;\ c-m;\ y, z)$$

पर विचार करें। (1·1) से यह निकलता है कि

$$G_A(x, 1, 1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-b')}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b-b')}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}b,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b'-\frac{1}{2}c,\ 1+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b'-\frac{1}{2}c;\\ 1-a,\ 1+a+b+b'-c\end{matrix}\ 4x\right)$$

अत : हमें

$$G_A(\tfrac{1}{4}, 1, 1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-b')}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b-b')}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}b,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b'-\frac{1}{2}c,\ 1+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b'-\frac{1}{2}c;\\ 1-a,\ 1+a+b+b'-c\end{matrix}\ 1\right)$$

प्राप्त होगा। (2·6)

अब (2·6) के बाईं ओर के ${}_3F_2\,(1)$ को सालशुत्सियन, डिक्सन, वाटसन, तथा व्हिपल प्रमेयों द्वारा योगीकृत किया जा सकता है। बेली द्वारा [2] दिए गये सालशुत्सियन प्रमेय का व्यवहार करने पर हमें

$$G_A(1/a, a, a, -\tfrac{1}{2}, b', -\tfrac{1}{2}; 1/c, c, c; \tfrac{1}{4}, 1, 1)$$
$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-a)\Gamma(c-a-b')\Gamma(\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}b'+\frac{1}{4}-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c+\frac{1}{2}-b')\Gamma(1-a+\frac{1}{2})} \tag{2·7}$$

प्राप्त होगा। इसी प्रकार से

$$H_C(a, b, b'; 1+a+b; 1, 1, 1)=\frac{\Gamma(1+a+b)\Gamma(1-b')}{\Gamma(1+a+b-b')} \tag{2·8}$$

प्राप्त होगा।

3. इस अनुभाग में हम क्रमशः श्रीवास्तव [7, p. 38] तथा सरन[6] द्वारा पारिभाषित तीन चरों वाले H_B तथा F_N हाइपरज्यामितीय फलनों के लिये संकलन सूत्र प्राप्त करेंगे।

यदि $H_B(a, b, b'; c_1, c_2, c_3; x, y, z)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b, n)(b', n)}{(1, n)(c_2, n)}\, y^n F_2(a, b+n, b'+n; c_1, c_3; x, z)$$

पर विचार करें तो हमें

$$H_B(-r, b, b'; 1+b-b'-r, c_2, c_3; 1, y, 1)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b, n)(b', n)}{(1, n)(c_2, n)} y^n F_2(-r, b+n, b'+n, 1+b-b'-r, c_3; 1, 1)$$

प्राप्त होगा जहाँ r धनपूर्णांक है । (1·2) का उपयोग करते हुये सरलीकरण के अनन्तर हमें

$$H_B(1, y, 1)=\frac{(b-b'+c_3, r)(b', r)}{(c_3, r)(b'-b, r)} \, {}_2F_1(b, b'+r; c_2; y) \tag{3·1}$$

प्राप्त होगा । अतः इससे यह अर्थ निकलता है कि

$$H_B(1, 1, 1)=\frac{(b-b'+c_3, r)(b', r)}{(c_3, r)(b'-b, r)} \, {}_2F_1(b, b'+r; c_2; 1)$$
$$=\frac{(b-b'+c_3, r)(b', r)}{(c_3, r)(b'-b, r)} \frac{\Gamma(c_2)\Gamma(c_2-b-b'-r)}{\Gamma(c_2-b)\Gamma(c_2-b'-r)} \tag{3·2}$$

इसी प्रकार [4, p. 104 (47)], (1·3), तथा [4, p. 104 (51)] का उपयोग करने पर

$$H_B(-r, b, b'; [1+b-b'-r], [1+b-b'-r], c_3; 1, -1, 1)$$
$$=2^{-b}\frac{(b-b'+c_3, r)(b', r)}{(c_3, r)(b'-b, r)} \frac{\Gamma(1+b-b'-r)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1-b'-r+\frac{1}{2}b)\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b)} \tag{3·3}$$

$$H_B(-r, b, b'; 1+b-b'-r, \tfrac{1}{2}(1+b+b'+r), c_3; 1, \tfrac{1}{2}, 1)$$
$$=\frac{(b-b'+c_3, r)(b', r)}{(c_3, r)(b'-b, r)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b'+\frac{1}{2}r)}{\Gamma(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}r)} \tag{3·4}$$

तथा

$$H_B(-r, b, 1-b-r; 2b, c_2, c_3; 1, \tfrac{1}{2}, 1)$$
$$=2^{1-c_2}\frac{(2b+c_3+r-1, r)(1-b-r, r)}{(c_3, r)(1-2b-r, r)} \frac{\Gamma(c_2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c_2)\Gamma(\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2})} \tag{3·5}$$

इसके बाद पुनः विचार करने पर

$$F_N(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2; c_1, c_2, c_2; x, y, z)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_2, n)(b_2, n)}{(1, n)(c_2, n)} y^n F_2(b_1, a_1, a_3; c_1, c_2+n; x, z)$$

अतः हमें

$$F_N(a_1, a_2, a_3, -r, b_2, -r; 1+a_1-a_3-r, c_2, c_2; 1, y, 1)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_2, n)(b_2, n)}{(1, n)(c_2, n)} y^n F_2(-r, a_1, a_3; 1+a_1-a_3-r, c_2+n; 1, 1)$$

प्राप्त होता है।

(1·2) का व्यवहार करने पर

$$F_N(1, y, 1) = \frac{(a_3, r)(a_1+c_2-a_3, r)}{(a_3-a_1, r)(c_2, r)} \; {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a_2, b_2, a_1+c_2+r-a_3; \\ c_2+r, a_1-a_3+c_2 \end{matrix} y \right)$$

अतः हमें

$$F_N(1, 1, 1) = \frac{(a_3, r)(a_1+c_2-a_3, r)}{(a_3-a_1, r)(c_2, r)} \; {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a_2, b_2, a_1+c_2+r-a_3; \\ c_2+r, a_1-a_3+c_2 \end{matrix} 1 \right)$$

प्राप्त होगा। सालसुत्सियन प्रमेय के उपयोग से हमें

$$F_N(a_1, a_2, a_3, -r, -b_2, -r; 1+a_1-a_3-r, 1+a_2+b_2, 1+a_2+b_2; 1, 1, 1)$$
$$= \frac{(a_3, r)(1+a_1+a_2+b_2-a_3, r)}{(a_3-a_1, r)(1+a_2+b_2, r)}$$
$$\times \frac{\Gamma(1+a_2+b_2+r)\Gamma(a_3-a_1-b_2)\Gamma(a_3-a_1-a_2)\Gamma(1+r)}{\Gamma(a_3-a_1)\Gamma(1+a_2+r)\Gamma(1+b_2+r)\Gamma(a_3-a_1-a_2-b_2)} \qquad (3{\cdot}6)$$

प्राप्त होगा जिसमें r घन पूर्णांक है तथा a_2, b_2 या $1+a_1+a_2+b_2+r-a_3$ ऋण पूर्णांक है।

निर्देश

1. एपेल, पी० तथा जे० काम्पे द फेरी। Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques Polenomes d Hermite (Paris) **गोथिर विलर्स**, 1926.
2. बेली, डब्लू, एन०। Generalized hypergeometric series, Cambridge Tract, 1935.
3. भट्ट, आर०, सी०। **डी० फिल० शोध प्रबन्ध, जोधपुर विश्वविद्यालय**, 1965.
4. एर्डेल्यी, ए०। Higher Transcendental functions, **भाग** I, **मैकग्राहिल**, 1953
5. पाण्डेय, आर० सी०। **जर्न० मैथ० एण्ड मेकैनिक्स**, 1963, **12 (1)**, 113-18.
6. सरन, एस०। **गणित**, 1954, 5, 77-97
7. श्रीवास्तव, एच० एम०। **गणित**, 1964 **15**(2).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 3, July 1970, Pages 145-150

सार्वीकृत कोण्टोरोविच-लेबडेव परिवर्त के कुछ गुण

आशा पेंडसे
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—अगस्त 3, 1968]

सारांश

इस शोधपत्र का उद्देश्य व्हिटेकर फलन के गुणों की सहायता से एक नवीन परिवर्त, सार्वीकृत कोण्टोरोविच-लेबडेव परिवर्त, के कुछ गुणों की स्थापना करना है।

Abstract

Some properties of the generalized Kontorovitch-Lebdev transform. *By* Asha Pendse, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

The object of this paper is to establish some of the properties of this new transform, by the help of the properties of Whittaker function.

1. भूमिका : इस शोधपत्र का उद्देश्य जेट विम्प [(6), p. 37; (4·9) तथा (4·10)] द्वारा पारिभाषित सार्वीकृत कोण्टोरोविच लेबडेव परिवर्त युग्म (1·1) तथा (1·2) के कुछ रोचक फलों की स्थापना करना है। वे हैं :—

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{ax}\right)^{1/2}\int_0^\infty W_{k,\,it}(ax)\; g(t)\; dt \tag{1·1}$$

तथा इसका विलोमन सूत्र :—

$$g(x)=a(\pi)^{-5/2}\,.\,x \sinh\,(2\pi x)\;\Gamma(\tfrac{1}{2}-k+ix)\;\Gamma(\tfrac{1}{2}-k-ix)\times \int_0^\infty (at)^{-3/2}\,W_{k,\,ix}(at)\,f(t)\,dt. \tag{1·2}$$

समाकल परिवर्त युग्म (1·1) तथा (1·2) में व्हिटेकर फलन न्यष्टि है। यही नहीं, (1·1) में समाकलन को न्यष्टि में सन्निहित प्राचलों के प्रति सम्पन्न किया गया है, जबकि विलोमन सूत्र (1·2) इस तर्क के आधार पर सम्पन्न किया जाता है।

फलों की ज्ञात विशिष्ट दशायें कोण्टोरोविच-लेबडेव परिवर्त युग्म [(2); p. 173] हैं, अर्थात्

$$f(x)=\int_0^\infty K_{it}(x)\ g(t)dt \tag{1·3}$$

तथा

$$g(x)=a\ .\ \pi^{-2}\ .\ x\sinh(\pi x)\int_0^\infty t^{-1}K_{ix}(t)\ f(t)dt \tag{1·4}$$

हम (1·1) की सांकेतिक अभिव्यक्ति निम्न रूप में करेंगे :

$$f(x)\frac{W}{k}\ g(t). \tag{1·5}$$

साथ ही, पूरे शोधपत्र में हम $\Gamma(a+b)\Gamma(a-b)$ को $\Gamma(a\pm b)$ रूप में लिखेंगे और $\{a_p, e_p\}$ प्राचलों के समूह $(a_1, e_1),\ldots, (a_p, e_p)$ के लिये प्रयुक्त होगा।

2. मुख्य फल

प्रमेय 1: यदि $g(t)\in L(0,\infty)$

तथा
$$f(x)\ \frac{W}{k}\ g(t) \tag{2·1}$$

तो
$$e^{-ax/2(a-1)}\ .\ a^{1/2-k}\ .\ f(ax)\ \frac{W}{k+n}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)^n}{(n)\,!}\ a^{-n}\ .\ (-1)^n\ g(t), \tag{2·2}$$

यदि x, y तथा $R(a)>0$ वास्तविक हों।

उपपत्ति—अभिकल्पना द्वारा

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{ax}\right)^{1/2}\int_0^\infty W_{k,\ it}(ax)\ g(t)dt \tag{2·3}$$

फल [(5); p. 30] के आधार पर, अर्थात्

$$W_{k,\ m}(x\,y)=e^{x/2(y-1)}\ .\ y^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-1)^n}{(n)\,!}\ y^{-n}(-1)^n\ W_{k+n,\ m}(x) \tag{2·4}$$

हमें निम्नांकित प्राप्त होगा :

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{ax}\right)^{1/2}e^{x/2(a-1)}\ .\ a^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)^n}{(n)\,!}\ a^{-n}(-1)^n\int_0^\infty W_{k+n,\ it}(x)\ g(t)dt \tag{2·5}$$

x के स्थान पर ax रखने पर तथा पदों को पुनःव्यवस्थित करने पर वांछित फल (2·2) मिलता है। इस उपपत्ति में समीकरण (2·5) में पद प्रति पद का समाकलन करना पड़ता है। इसकी पुष्टि करने के लिये देखते हैं कि

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)^n}{(n)\,!} a^{-n}(-1)^n W_{k+n,\, it}(x),$$

$t \geqslant 0$ परास में एक समानतः अभिसारी श्रेणी है तथा

(b) $g(t) \in L(0, \infty)$ अभिकल्पना द्वारा।

अतः मकलाचलान के अनुसार [(3); p. 175] पद प्रति पद समीकरण विहित है।

प्रमेय 2 : यदि $g(t) \in L(0, \infty)$

तथा $$f(x) \frac{W}{k} g(t) \tag{2·6}$$

तो $$e^{-ay/2} \cdot \left(\frac{x}{x+y}\right)^{-(k+1/2)} \cdot f(x+y) \frac{W}{k+n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)\,!} \left(\frac{x}{x+y}\right)^n g(t) \tag{2·7}$$

यदि x, y तथा $R(a)>0$ वास्तविक हों।

उपपत्ति—अभिकल्पना द्वारा हमें ज्ञात है कि

$$f(x+y) = \left(\frac{\pi}{ax+ay}\right)^{1/2} \int_0^\infty W_{k,\, ix}(ax+ay)\, g(t)dt \tag{2·8}$$

फल [(5); p. 29] के अनुसार, अर्थात्

$$W_{k,\, m}(x+y) = e^{1/2y} \left(\frac{x}{x+y}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)\,!} \left(\frac{y}{x+y}\right)^n W_{k+n,\, m}(x) \tag{2·9}$$

हमें

$$f(x+y) = \left(\frac{\pi}{ax+ay}\right)^{1/2} e^{ay/2} \left(\frac{x}{x+y}\right)^k \times$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)\,!} \left(\frac{y}{x+y}\right)^n \int_0^\infty W_{k+n,\, it}(ax)\, g(t)\, dt \tag{2·10}$$

प्राप्त होता है और पदों को पुनः व्यवस्थित करने पर अभीष्ट फल (2·7) प्राप्त होता है।

उपर्युक्त उपपत्ति में समीकरण (2·10) का पद प्रति पद समाकलन हुआ है जो न्यायोचित है, क्योंकि अभिकल्पना के अनुसार $g(t) \in L(0, \infty)$

तथा
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!}\left(\frac{y}{x+y}\right)^n W_{k+n,\, it}(ax)$$
मकलाचलान [(3), p. 175]

के अनुसार $t \geqslant 0$ परास में समानतः अभिसारी है।

3. उदाहरण : यदि हम

$$f(x)=\pi^{5/2} \,.\, a^{1/2} \,.\, z^{1-k} \,.\, \Gamma(\rho) \,.\, \rho^{-a/2(2+z)} \,.\, x^{k+\rho-1/2} \,.\, (x+z)^{-\rho} \tag{3·1}$$

से प्रारम्भ करें तो फल [(1); p. 273; (31)] के बल पर हमें (1·2) से

$$g(t)=t \sinh (2\pi t)\Gamma(\tfrac{1}{2}-k\pm it)\Gamma(k+\rho\pm it-\tfrac{1}{2})\, W_{1-k-\rho,\, it}(az) \tag{3·2}$$

प्राप्त होगा। अतः (3·1) तथा (3·2) में प्रमेय 1 का व्यवहार करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)^n}{(n)!}\, a^{-n}(-1)^n\int_0^{\infty} t \sinh(2\pi t)\Gamma(\tfrac{1}{2}-k\pm it)\times$$
$$\Gamma(k+\rho\pm it-\tfrac{1}{2})\, W_{k+n,\, it}(ax)\, W_{1-k-e,\, it}(az)dt$$
$$=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \,.\, \Gamma(c) \,.\, x^{\rho+k} \,.\, \left(x+\frac{3}{a}\right)^{\rho} \,.\, z^{1-k} \,.\, e^{-a/2\{2x(a-1)+z\}} \tag{3·3}$$

जहाँ $R(a)>0, \quad R(k+\rho-2)>\frac{3}{2}, \ |\arg z|<\pi$

पुनः यदि हम $z=1/x$, रखें तो

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)^n}{(n)!}\, a^{-n}(-1)^n\int_0^{\infty} t \sinh (2\pi t)\Gamma(\tfrac{1}{2}-k\pm it)\times$$
$$\Gamma(k+\rho\pm it-\tfrac{1}{2})\, W_{k+n,\, it}(ax)\, W_{1-k-\rho,\, it}(a/x)dt$$
$$=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \,.\, \Gamma(\rho) \,.\, a^{-\rho} \,.\, x^{2k+\rho-1} \,.\, \left(ax+\frac{1}{ax}\right)^{\rho} e^{-a/2\{2x(a-1)+1/x\}} \tag{3·4}$$

प्राप्त होगा जो नवीन फल प्रतीत होता है।

(ii) अब, यदि हम

$$f(x)=\pi^{5/2} \,.\, x^{-k-1/2} \,.\, H_{p,\, q}^{\mu,\, \nu}\left[zx^{-\sigma} \left| \begin{matrix}\{a_p, \alpha_p\}\\ \{b_q, \beta_q\}\end{matrix}\right.\right] \tag{3·5}$$

से प्रारम्भ करें तो फल [(4); p. 101; (3·3)] के बल पर

$$g(t)=a^{k+1/2}\,.\,t\sinh(2\pi t)\;H^{\mu+2,\;\nu+1}_{p+1,\;q+2}\left[za^{\sigma}\left|\begin{matrix}(0,\sigma),\{a_p,\alpha_p\}\\(\pm it-k-\tfrac{1}{2},\sigma),\{b_q,\beta_q\}\end{matrix}\right.\right] \tag{3·6}$$

प्राप्त होगा। प्रमेय 1 में $f(x)$ तथा $g(t)$ के मानों को रखने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)^n}{(n)!}a^{-n}(-1)^n\int_0^{\infty}t\sinh(2\pi t)\,W_{k+n,\,it}(ax)\times$$

$$H^{\mu+2,\;\nu+1}_{p+1,\;q+2}\left[za^{\sigma}\left|\begin{matrix}(0,\sigma),\{a_p,\alpha_p\}\\(\pm it-k-\tfrac{1}{2},\sigma)\{b_q,\beta_q\}\end{matrix}\right.\right]dt$$

$$=\pi^2(a^3x)^{-k}\,e^{-ax/2(a-1)}\,H^{\mu,\;\nu}_{p,\;q}\left[z(ax)^{-\sigma}\left|\begin{matrix}\{a_p,\alpha_p\}\\\{b_q,\beta_q\}\end{matrix}\right.\right] \tag{3·7}$$

प्राप्त होगा यदि $R(k)<\frac{1}{2}$, $R(a)>0, \sigma>0$ $|\arg a|<\frac{1}{2}\pi$

(a) $R\left[\sigma\left(\frac{1-a_j}{\alpha_j}\right)-k\right]>\frac{1}{2}, j=1,\ldots,\nu,$

(b) $R\left(1+\sigma\frac{b_h}{\beta_h}\right)>0;\, h=1,\ldots,\mu,$

(c) $\sum_1^p\alpha_j-\sum_1^q\beta_j\leqslant 0,$

(d) $|\arg z|<\frac{1}{2}\lambda\pi$, जहाँ

$$\lambda\equiv\sum_1^{\nu}\alpha_j-\sum_{\nu+1}^{p}\alpha_j+\sum_1^{\mu}\beta_j-\sum_{\mu+1}^{q}\beta_j>0.$$

$\sigma=1$, $\alpha_j=\beta_k=1$ रखने पर, यदि $j=1,\ldots,p$ तथा $k=1,\ldots,q$; H-फलन के विख्यात गुण के कारण अर्थात्

$$H^{m,\;n}_{p,\;q}\left[x\left|\begin{matrix}\{a_p,1\}\\\{b_q,1\}\end{matrix}\right.\right]=G^{m,\;n}_{p,\;q}\left(x\left|\begin{matrix}\{a_p\}\\\{b_q\}\end{matrix}\right.\right) \tag{3·8}$$

हमें पदों को पुनः व्यस्थित करने पर निम्नांकित फल प्राप्त होता है

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)^n}{(n)!}a^{-n}(-1)^n\int_0^{\infty}t\sinh(2\pi t)\,W_{k+n,\,it}(ax)\;\;G^{\mu+2,\;\nu+1}_{p+1,\;q+2}\left(\frac{b}{a}\left|\begin{matrix}1\pm it,\{a_p\}\\\frac{1}{2}-k,\{b_q\}\end{matrix}\right.\right)dt$$

$$=\pi^2(a^3x)^{-k}\,e^{-ax/2(a-1)}\,G^{\mu,\;\nu}_{p,\;q}\left(\frac{z}{ax}\left|\begin{matrix}\{a_p\}\\\{b_q\}\end{matrix}\right.\right) \tag{3·9}$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं, राजस्थान विश्वविद्यालय के गणित विभाग के रीडर डॉ० के० सी० शर्मा की कृतज्ञ हूँ जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मेरा पथ-प्रदर्शन किया।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral Transforms. **भाग** II, **बेटमैन मैनुस्क्रिप्ट प्रोजेक्ट,** 1954.
2. वही । Higher Transcendental Functions, **भाग** I, **वही,** 1953.
3. मकलाचलान, एन० डब्लू० । Modern Operational Calculus. **मैकमिलन कम्पनी लिमिटेड, लन्दन,** 1948.
4. शर्मा, ओ०पी० । **प्रोसी०नेशन०एके० साइंस (इण्डिया),** 1967, **37.**
5. स्लेटर, एल० जे० । Confluent Hypergeometric Functions, **कैम्ब्रिज यूनीवर्सिटी प्रेस,** 1960.
6. विम्प, जे० । **प्रोसी० एडिन० मैथ० सोसा०,** 1964, **14,** (श्रेणी IIO, I)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 3, July, 1970, Pages 151-159

सर्वमान्य बहुपदियों वाले कतिपय सूत्र

एल० के० भागचन्दानी तथा पी० सी० मुनोट
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—फरवरी 10, 1969]

सारांश

इस शोध-पत्र में जिस मुख्य फल की स्थापना करनी है वह है

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (ax+\beta y)^{a_p-1}(a'x+\beta'y)c_r-1 \exp[-(ax+\beta y) -(a'x+\beta'y)]f_n^{(\lambda,k_1)}[a_p-1;\, bq,\, u(ax+\beta y)]f_m^{(\mu,k_2)}[c_r-1;\, ds;\, v(a'x+\beta'y)dx.dy = \frac{T(a_p)T(c_r)}{x} f_n^{(\lambda,k_1)}(a_p;\, bq;\, \mu)\, f_m^{(\mu,k_2)}(c_r;\, ds;\, v)$$

जहाँ $R(a_p)>0,\ R(c_r)>0$

इससे कई फलों को प्राप्त किया गया है।

Abstract

Some formulae involing classical polynomials. *By* L. K. Bhagchandani and P. C. Munot, Department of Mathematics, Jodhpur University, Jodhpur.

In this paper the main result to be established is:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (ax+\beta y)^{a_p-1}(a'x+\beta'y)c_r-1 \exp[-(ax+\beta y) -(a'x+\beta'y]f_n^{(\lambda,k_1)}[a_p-1;\, bq,\, u(ax+\beta y)]f_m^{(\mu,k_2)}[c_r-1;\, ds;\, v(a'x+\beta'y)\, dx.dy = \frac{T(a_p)T(c_r)}{x} f_n^{(\lambda,k_1)}(a_p;\, b_q;\, \mu) f_m^{(\mu,k_2)}(c_r,\, ds;\, v)$$

where $R(a_p)>0;\ R(c_r)>0$

Many results have been obtained from it.

1. हाल ही में जैन [2, p. 177 (1.1)] ने सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदी को

$$f_n^{(c,k)}(a_p; b_q; x) = f_n^{(c,k)}(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; x)$$

$$= \frac{(c)_n}{n!}\, {}_{p+k}F_{q+k}\left[\begin{matrix} -n, \triangle(k-1, c+n), a_1, a_2, \ldots, a_p; \\ \triangle(k, c), b_1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix}\ (k-1)^{k-1} x\right] \tag{1·1}$$

के रूप में पारिभाषित किया है जिसमें n, k अनृण पूर्णांक हैं तथा $\triangle(k, c)$ द्वारा k के प्राचल समूह $c/k, (c+1)/k, \ldots (c+k-1)/k$ व्यंजित हुये हैं।

उन्होंने निम्नांकित सूत्र [2, p. 177-78] तथा [2, p. 181] भी दिए हैं

$$f_n^{(1+a,\,1)}(x) = L_n^{(a)}(x) \quad \text{(लागेर बहुपदी)} \tag{1·2}$$

$$f_n^{(1+a+b,2)}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b, 1+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b; 1+a; x\right)$$

$$= \frac{(1+a+b)_n}{(1+a)_n} P_n^{(a,b)}(1-2x) \quad \text{(जैकोबी बहुपदी)} \tag{1·3}$$

$$f_n^{(1+a+b,2)}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b, 1+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b, \xi; 1+a, p; v\right)$$

$$= \frac{(1+a+b)_n}{(1+a)_n} H_n^{(a,b)}(\xi; p; v) \tag{1·4}$$

जिसमें $H_n^{(a,b)}(\xi; p; v)$ राइस की सार्वीकृत बहुपदी है जिसे खांडेकर [3, p 157 (2.1)] ने प्रचारित किया

$$f_n^{(c,2)}\left(\tfrac{1}{2}c, \tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}; -; x\right) = \frac{(c)_n}{n!}\, {}_2F_0(-n, c+n; -; x) = \phi_n(c, x) \tag{1·5}$$

जहाँ $\phi_n(c, x)$ को बेसेल बहुपदी[5] के मानक रूप में ग्रहण किया जाता है। क्राल तथा फ्रिंक के संकेत[4]

$$\phi_n(c, x) = \frac{(c)_n}{n!} y_n(x, c+1, -1)$$

$$f_n^{(c,2)}(a; c; x) = \frac{(c)_n}{n!}\, {}_3F_3\left[\begin{matrix} -n, c+n, a; \\ \tfrac{1}{2}c, \tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}, c \end{matrix}\ x\right] \equiv R_n(a; c; x) \tag{1·6}$$

यह $R_n(a; c; x)$ बेटमैन के $Z_n(x)$ में घटित होती है यदि $2a=c=1$.

तथा

$$f_n^{(c,k)}(a_p; b_q; x) = \frac{1}{\Gamma(a_p)} \int_0^\infty e^{-t} t^{a_p-1} f_n^{(c,k)}(a_{p-1}; b_q; xt)\, dt \tag{1·7}$$

जिसमें $R(a_p) > 0$

यह देखा जा सकता है कि (1·1) से निम्नांकित फल प्राप्त किये जा सकते हैं :

$$f_n^{(1+\alpha,1)}\,(1+\alpha+\beta+n;\ -;\ x)=P_n^{(\alpha,\beta)}\,(1-2x) \tag{1·8}$$

$$f_n^{(1+\alpha,1)}\,(1+\alpha+\beta+n,\ \xi;\ \eta;\ x)=H_n^{(\alpha,\beta)}\,(\xi;\ \eta;\ x) \tag{1·9}$$

$$f_n^{(c,1)}\,(c,\ c+n;\ -;\ x)\phi_n(c,\ x) \tag{1·10}$$

$$f_n^{(c,1)}\,(a,\ a+c;\ \tfrac{1}{2}c,\ \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}c;\ x)=R_n(a;\ c;\ x) \tag{1·11}$$

समाकल [6, p. 343]

$$\int_0^\infty\int_0^\infty F(\alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y)\ dxdy=\frac{1}{K}\int_0^\infty\int_0^\infty F(u,\ v)\ du\ dv. \tag{1·12}$$

से, जिसमें α, β, α' तथा β' ऐसे प्राचल हैं कि

$$K=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}\neq 0$$

हम रूपान्तरित समाकल

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f_1(\alpha x+\beta y)f_2(\alpha' x+\beta' y)\ dx\ dy=\frac{1}{K}\int_0^\infty f_1(u)\ du\int_0^\infty f_2(v)\ dv. \tag{1·13}$$

प्राप्त करते हैं यदि $F(\alpha x+\beta y,\ \alpha' x+\beta' y)=f_1(\alpha x+\beta y)f_2(\alpha' x+\beta' y)$ रखें ।

(1·13) से यह देखा जाता है कि द्विगुण समाकल दो सरल समाकलों के गुणनफल में रूपान्तरित हो जाता है । हम इन फलों का उपयोग सर्वमान्य बहुपदियों वाले कतिपय समाकलों का मान निकालने के लिये उपयोग में लावेगें ।

2. मुख्य फल जिसकी स्थापना करना है वह है :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{a_p-1}(\alpha' x+\beta' y)^{c_r-1}\exp\left[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)\right]$$
$$f_n^{(\lambda,k_1)}\,[a_{p-1};\ b_q;\ u(\alpha x+\beta y)]f_m^{(\mu,k_2)}\,[c_{r-1};\ d_s;\ v(\alpha' x+\beta' y)]\ dx\ dy.$$
$$=\frac{\Gamma(a_p)\Gamma(c_r)}{K}f_n^{(\lambda,k_1)}\,(a_p;\ b_q;\ u)f_m^{(\mu,k_2)}\,(c_r;\ d_s;\ v) \tag{2·1}$$

जहाँ $R(a_p)>0,\ R(c_r)>0$.

इससे हम निम्नांकित फलों को निकालेंगे

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{-1/2}(\alpha' x+\beta' y)^{-1/2} \exp\left[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)\right]$$

$$f_n[a_1, \ldots, a_p; \tfrac{1}{2}, b_1 \ldots, b_q; (\alpha x+\beta y)\, u]$$

$$f_m[a_1, \ldots, a_p; \tfrac{1}{2}, b_1, \ldots, b_q; (\alpha' x+\beta' y)v]\, dx\, dy.$$

$$=\frac{\pi}{K} f_n[a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; u]\, f_m[a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; v] \tag{2·2}$$

यह धावन* द्वारा दिया गया हाल ही का एक फल है (1, p 479)

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{a-1}(\alpha' x+\beta' y)^{b-1} \exp\left[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)\right]$$

$${}_1F_2[-n; 1+\gamma, a; u(\alpha x+\beta y)]\,{}_1F_2[-m; 1+\delta, b; v(\alpha' x+\beta' y)]\, dx\, dy.$$

$$=\frac{n!\, m!\, \Gamma(a)\Gamma(b)}{(1+\gamma)_n(1+\delta)_m K} L_n^{(\gamma)}(u) L_m^{(\delta)}(v) \tag{2·3}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{\gamma+\mu+n}(\alpha' x+\beta' y)^{\delta+\nu+m} \exp\left[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)\right]$$

$$L_n^{(\gamma)}\,(n]\alpha x+\beta y)]L_m^{(\delta)}\,[v(\alpha' x+\beta' y)]\, dx\, dy.$$

$$=\frac{\Gamma(1+\gamma+\mu+n)\Gamma(1+\delta+\nu+m)}{K} P_n^{(\gamma,\mu)}(1-2u) P_m^{(\delta,\nu)}(1-2v) \tag{2·4}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{\gamma+\mu+n}(\alpha' x+\beta' y)^{\delta+\nu+m} \exp\left[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)\right]$$

$${}_2F_2[-n, \xi; 1+\gamma, \eta; u(\alpha x+\beta y)]\; {}_2F_2\,[-m, \xi'; 1+\delta_1\, \eta'; v(\alpha' x+\beta' y)]\, dx\, dy.$$

$$=\frac{n!\, m!\, \Gamma(1+\gamma+\mu+n)\Gamma(1+\delta+\nu+m)}{(1+\gamma)_n(1+\delta)_m K} H_n^{(\gamma,\mu)}(\xi; \eta; u) H_m^{(\delta,\nu)}(\xi'; \eta'; v) \tag{2·5}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{\lambda+n-1}(\alpha' x+\beta' y)^{\mu+m-1} \exp\left[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)\right]$$

$${}_1F_0[-n; -; u(\alpha x+\beta y)]\; {}_1F_0\,[(-m; -; v(\alpha' x+\beta' y)]\, dx\, dy.$$

$$=\frac{n!\, m!\, \Gamma(\lambda+n)\Gamma(\mu+m)}{(\lambda)_n(\mu)_m K} \phi_n(\lambda; u)\phi_m(\mu; v) \tag{2·6}$$

*ऐसा प्रतीत होता है कि धावन के फल में कुछ त्रुटि है जिसे (2·2) के अनुसार ठीक किया जा सकता है ।

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{\lambda+n-1}(\alpha' x+\beta' y)^{\mu+m-1} \exp[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)]$$

$$ {}_2F_3[-n, a; \tfrac{1}{2}\lambda, \tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}, \lambda; u(\alpha x+\beta y)]\ {}_2F_3[-m, b; \tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\mu, \mu; v(\alpha' x+\beta' y)]\ dx\, dy.$$

$$=\frac{n!\, m!\, \Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{K} R_n(a; \lambda; u) R_m(b; \mu; v) \qquad (2\cdot7)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{a-1}(\alpha' x+\beta' y)^{\gamma+\delta+m} \exp[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta y)]$$

$$ {}_1F_2[-n; 1+\nu, a; u(\alpha x+\beta y)] L_m^{(\gamma)} [v(\alpha' x+\beta' y)]\ dx\, dy.$$

$$=\frac{n!\, \Gamma(a)\Gamma(1+\gamma+\delta+m)}{(1+\nu)_n K} L_n^{(\nu)}(u) P_m^{(\gamma,\delta)}(1-2v) \qquad (2\cdot8)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{a-1}(\alpha' x+\beta' y)^{\gamma+\delta+m} \exp[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)]$$

$$ {}_1F_2[-n; 1+\nu, a; u(\alpha x+\beta y)]\ {}_2F_2[-m, \xi; 1+\gamma, \eta; v(\alpha' x+\beta' y)]\ dx\, dy.$$

$$=\frac{n!\, m!\, \Gamma(a)\Gamma(1+\gamma+\delta+m)}{(1+\nu)_n(1+\delta)_n K} L_n^{(\nu)}(u) H_m^{(\gamma,\delta)}(\xi; \eta; v) \qquad (2\cdot9)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha x+\beta x)^{a-1}(\alpha' x+\beta' y)^{\mu+m-1} \exp[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)]$$

$$ {}_1F_2[-n; 1+\gamma, a; u(\alpha x+\beta y)]\ {}_1F_0[-m; -; v(\alpha' x+\beta' y)]\ dx\, dy$$

$$=\frac{n!\, m!\, \Gamma(a)\Gamma(\mu)}{(1+\gamma)\ K} L_n^{(\gamma)}(u) \phi_m(\mu, v) \qquad (2\cdot10)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (ax+\beta y)^{\gamma+\mu+n}(\alpha' x+\beta' y)^{\delta+\nu+m} \exp[-(ax+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)]$$

$$L_n^{(\gamma)} [u(\alpha x+\beta y)]\ {}_2F_2[-m, \xi; 1+\delta, \eta; v(\alpha' x+\beta' y)]\ dx\, dy$$

$$=\frac{m!\, \Gamma(1+\gamma+\mu+n)\Gamma(1+\delta+\nu+m)}{(1+\delta)_m K} P_n^{(\gamma,\mu)}(1-2u)\, H_m^{(\delta,\nu)}(\xi; \eta; v)$$

$$(2\cdot11)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{\gamma+\mu+n}(\alpha' x+\beta' y)^{\delta+m-1} \exp[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)]$$

$$L_n^{(\gamma)}[u(\alpha x+\beta y)]\, {}_1F_0[-m; -; (\alpha' x+\beta' y)v]\, dx\, dy$$

$$=\frac{m!\,\Gamma(1+\gamma+\mu+n)\Gamma(\delta)}{K} P_n^{(\gamma,\mu)}(1-2u)\phi_m(\delta, v) \quad (2\cdot12)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{\gamma+\mu+n}(\alpha' x+\beta' y)^{\delta+m-1} \exp[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)]$$

$$L_n^{(\gamma)}[u(\alpha x+\beta y)]\, {}_2F_3[-m, b; \tfrac{1}{2}\delta, \tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1}{2}, \delta; v(\alpha' x+\beta' y)]\, dx\, dy.$$

$$=\frac{m!\,\Gamma(\delta)\Gamma(1+\gamma+\mu+n)}{K} P_n^{(\gamma,\mu)}(1-2u)R_m(b; \delta; v) \quad (2\cdot13)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{\gamma+\mu+n}(\alpha' x+\beta' y)^{\delta+m-1} \exp[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)]$$

$${}_2F_2[-n, \xi; 1+\gamma, \eta; u(\alpha x+\beta y)]\, {}_1F_0[-m; -; v(\alpha' x+\beta' y)]\, dx\, dy.$$

$$=\frac{n!\, m!\,\Gamma(1+\gamma+\mu+n)\Gamma(\delta)}{(1+\gamma)_n K} H_n^{(\gamma,\mu)}(\xi, \eta, u)\phi_m(\delta, v) \quad (2\cdot15)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{\gamma+\mu+n}(\alpha' x+\beta' y)^{\delta+m-1} \exp[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)]$$

$${}_2F_2[-u, \xi; 1+\gamma, \eta; u(\alpha x+\beta y)]\, {}_2F_3[-m, b; \tfrac{1}{2}\delta, \tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1}{2}, \delta; v(\alpha' x+\beta' y)]\, dx\, dy.$$

$$=\frac{n!\, m!\,\Gamma(\delta)\Gamma(1+\gamma+\mu+n)}{(1+\gamma)_n K} H_n^{(\gamma,\mu)}(\xi; \eta; u)R_m(b; \delta; v) \quad (2\cdot16)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{\lambda+n-1}(\alpha' x+\beta' y)^{\mu+m-1} \exp[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)]$$

$${}_1F_0[-n; -; u(\alpha x+\beta y)]\, {}_2F_3[-m, b; \tfrac{1}{2}\mu, \tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2}, \mu; v(\alpha' x+\beta' y)]\, dx\, dy.$$

$$=\frac{n!\, m!\,\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{K} \phi_n(\lambda, u)R_m(b; \mu; v) \quad (2\cdot17)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{1/2\gamma+1/2\delta}(\alpha' x+\beta' y)^{1/2\rho+1/2\sigma} \exp\left[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)\right]$$

$$_2F_2\left[-n,\ 1+\gamma+\delta+n;\ 1+\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{1}{2}\delta,\ 1+\gamma;\ u(\alpha x+\beta y)\right]$$

$$_2F_2\left[-m,\ 1+\rho+\sigma+m;\ 1+\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\sigma,\ 1+\rho;\ v(\alpha' x+\beta' y)\right]\, dx\ dy.$$

$$=\frac{n!\ m!\ \Gamma(1+\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{1}{2}\delta)\Gamma(1+\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\sigma)}{(1+\gamma)_n(1+\sigma)_m K} P_n^{(\gamma,\delta)}(1-2u)P_m^{(\rho,\sigma)}(1-2v) \qquad (2\cdot18)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{1/2\gamma+1/2\delta}(\alpha' x+\beta' y)^{1/2\rho+1/2\sigma} \exp\left[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)\right]$$

$$_3F_3\left[-n,\ 1+\gamma+\delta+n,\ \xi;\ 1+\gamma,\ 1+\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{1}{2}\delta,\ p;\ u(\alpha x+\beta y)\right]$$

$$_3F_3\left[-m,\ 1+\rho+\sigma+m,\ \xi';\ 1+\rho,\ 1+\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\sigma,\ p';\ (\alpha' x+\beta' y)v\right]\, dx\, dy.$$

$$=\frac{n!\ m!\ \Gamma(1+\tfrac{1}{2}\gamma+\tfrac{1}{2}\delta)\Gamma(1+\tfrac{1}{2}\rho+\tfrac{1}{2}\sigma)}{(1+\gamma)_n(1+\rho)_m K} H_n^{(\gamma,\delta)}(\xi;\ p;\ u)\ H_n^{(\rho,\sigma)}(\xi';\ p';\ v)$$

$$(2\cdot19)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{1/2\lambda-1/2}(\alpha' x+\beta' y)^{1/2\mu-1/2} \exp\left[-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)\right]$$

$$_2F_1\left[-n,\ \lambda+n;\ \tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2};\ u(\alpha x+\beta y)\right]\ {_2F_1}\left[-m,\ \mu+m;\ \tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2};\ v(\alpha' x+\beta' y)\right]\ dx\ dy$$

$$=\frac{n!\ m!\ \Gamma(\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2})}{(\lambda)_n(\mu)_m K}\ \phi_n(\lambda,u)\phi_m(\mu,v) \qquad (2\cdot20)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (\alpha x+\beta y)^{a-1}(\alpha' x+\beta' y)^{b-1} \exp\left|-(\alpha x+\beta y)-(\alpha' x+\beta' y)\right|$$

$$_2F_3\left[-n,\ \lambda+n;\ \tfrac{1}{2}\lambda,\ \tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2},\ \lambda;\ u(\alpha x+\beta y)\right]$$

$$_2F_3\left[-m,\ \mu+m;\ \tfrac{1}{2}\mu,\ \tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{1}{2},\ \mu;\ v(\alpha' x+\beta' y)\right]\ dx\ dy.$$

$$=\frac{n!\ m!\ \Gamma(a)\Gamma(b)}{(\lambda)_m(\mu)_m K}\ R_n(a;\ \lambda;\ u)R_m(b;\ \mu;\ v) \qquad (2\cdot21)$$

3. (2·1) की उपपत्ति

यदि फल (1·13) में हम

$$f_1(\alpha x+\beta y)=(\alpha x+\beta y)^{a_p-1} \exp\ \left[-(\alpha x+\beta y)\right] f_n^{(\mu,k_1)}\left[a_{p-1};\ b_q;\ u(\alpha x+\beta y)\right]$$

तथा

$$f_2(\alpha x+\beta y)=(\alpha' x+\beta' y)^{c_r-1} \exp[-(\alpha' x+\beta' y)] f_m^{(\mu,k_2)}[c_{r-1}; d_s; v(\alpha' x+\beta' y)]$$

लें तो इससे (2.1) के बाईं ओर का अंश प्राप्त होता है जो (1·7) के कारण

$$\frac{1}{K}\int_0^\infty X^{a_p-1} \exp(-X) f_n^{(\lambda,k_1)} | a_{p-1}; b_q; uX | dx$$

$$\int_0^\infty Y^{c_r-1} \exp(-Y) f_m^{(\mu,k_2)} (c_{r-1}; d_s; vY) dY.$$

$$=\frac{\Gamma(a_p)\Gamma(c_r)}{K} f_n^{(\lambda,k_1)} [a_p: b_q; u] f_m^{(\mu,k_2)} [c_r, d_s; v]$$

के बराबर है। इससे (2·1) सिद्ध हो जाता है।

जब हम (2·1) में $\lambda=\mu=1$, $k_1=k_2=2$, $p=r$, $q=s$, $a_p=c_p=b_q=d_q=\frac{1}{2}$

$a_i=c_i(i=1, 2, \ldots, p-1)$ तथा $b_j=d_j(j=1, 2, \ldots, q)$ रखते हैं तो यह (2·2) में घटित होता है।

(2·1) में $\lambda=1+\gamma$, $\mu=1+\delta$, $k_1=k_2=1$, $p=q=r=s=1$, $a_1=b_1=a$, $c_1=d_1=b$ रखने पर (2·3) की प्राप्ति होती है।

(2·1) में $\lambda=1+\gamma$, $k_1=k_2=1$, $\mu=1+\delta$, $p=r=1$, $q=s=0$, $a_1=1+\gamma+\mu+n$, $c_1=1+\delta+\nu+m$ रखने से (2·4) की प्राप्ति होती है।

(2·1) में $\lambda=1+\gamma$, $\mu=1+\delta$, $k_1=k_2=1$, $p=r=2$, $q=s=1$, $a_1=\xi$, $a_2=1+\gamma+\mu+n$ $b_1=\eta$, $c_1=\xi'$ $c_2=1+\delta+\nu+m$, $d_1=\eta'$ रखने से (2·5) की प्राप्ति होती है।

(2·1) में $k_1=k_2=1$, $p=r=2$, $q=s=0$, $a_1=\lambda$, $a_2=\lambda+n$, $c_1=\mu$, $c_2=\mu+m$ रखने से (2·6) की प्राप्ति होती है।

(2·1) में $k_1=k_2=1$, $p=r=2$, $q=s=2$, $a_1=a$, $a_2=\lambda+n$, $c_1=b$, $c_2=\mu+n$, $b_1=\frac{1}{2}\lambda$, $b_2=\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}$, $d_1=\frac{1}{2}\mu$, $d_2=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}$ रखने से (2·7) की प्राप्ति होती है।

(2·1) में $\lambda=1+\nu$, $\mu=1+\gamma$, $k_1=k_2=1$, $p=q=1$, $a_1=b_1=a$, $r=1$ तथा $c_1=1+\gamma+\delta+m$ रखने से (2·8) की प्राप्ति होती है।

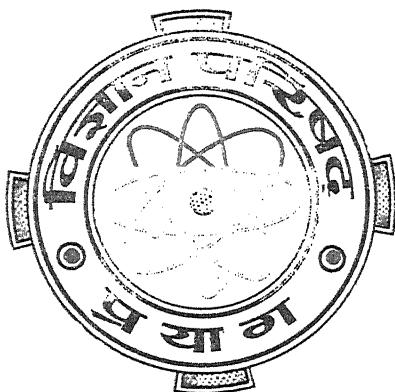
इसी प्रकार प्राचलों को निश्चित मान प्रदान करके (2·9) से लेकर (2·20) तक की प्राप्ति की जा सकती है।

निर्देश

1. धावन, जी० के०। **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०**, 1968, **64**, 417-20.
2. जैन, आर० एन। Annales Polinici Mathematici 1967, **19** 177-84.
3. खंडेकर, पी० आर०। **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1964, **34A**, 157-162.
4. क्राल, एच० तथा फ्रिक। **ट्राजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1949, **65**, 100-115.
5. रेनविले, ई० डी०। Special Functions, **न्यूयार्क** 1960.
6. विलियमसन, बी०। An elementary Treatise on Integral Calculus, 1955.

Vijnana Parishad
Anusandhan Patrika

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 13 October 1970 No. 4

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad, Thorn Hill Road, Allahabad, India.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 13 | अक्टूबर 1970 | संख्या 4

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 13, No 4, October 1970, Pages 161-168

H-फलन तथा सहचारी लेगेण्ड्र फलनों से सम्बन्धित कतिपय फल

रोशन लाल तक्षक
गणित विभाग, शिक्षणविद्यालय, कुरुक्षेत्र

[प्राप्त—नवम्बर 7, 1969]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में H-फलन सम्बन्धी एक समाकल का मान ज्ञात करते हुये इसका उपयोग लेगेण्ड्र फलनों से सम्बन्धित H-फलन के लिए दो प्रसार-सूत्रों की स्थापना की गई है। हमने माइजर के G-फलन तथा मैक्रोबर्ट के E-फलन के लिए कुछ प्रसार भी प्राप्त किया है।

Abstract

Some results involving Fox's H-function and associated Legendre functions. *By* R. L. Taxak, Department of Mathematics, College of Education, Kurukshetra.

In this paper we have evaluated an integral involving Fox's H-function and employed it to establish two expansion formulae for the H-function involving Legendre functions. We have also deduced some expansions for Meijer G-function and Macrobert's E-function.

1. विषय प्रवेश: फाक्स के H-फलन सम्बन्धी एक समाकल का मान ज्ञात करने के बाद इसका उपयोग लेगेण्ड्र फलनों से सम्बन्धित H-फलन के लिये दो प्रसार-सूत्रों की स्थापना करना इस शोध पत्र का मुख्य उद्देश्य है। विशिष्ट दशाओं के रूप में माइजर के G-फलन तथा मैक्रोबर्ट के E-फलन के लिये कतिपय प्रसार-सूत्र भी प्राप्त किये गये हैं।

उपपत्ति के लिये निम्नांकित सूत्रों की आवश्यकता होगी :—

(a) फाक्स [6, p. 408] द्वारा प्रचारित H-फलन को निम्नांकित प्रकार से प्रदर्शित एवं पारिभाषित किया गया है :—

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p)\\(b_1, f_1), \ldots, (b_q, f_q)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)z^s}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)}\,ds \qquad (1\cdot1)$$

जिसमें रिक्त गुणनफल को 1, $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$ के रूप में विवेचित किया जावेगा; सभी e तथा f धनात्मक हैं; L बार्नीज-कोटि का ऐसा कंटूर है कि $\Gamma(b_j-f_js)$, $j=1, 2, \ldots, m$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-a_j+e_js)$, $j=1, 2, \ldots, n$ के पोल कंटूर के बाईं ओर अवस्थित हों।

ब्राक्समा [3, p. 278] के अनुसार

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right]=O[\,|z|^e] \text{ लघु } z,$$

जहाँ $\Sigma_1^p e_j-\Sigma_1^q f_j\leqslant 0$ तथा $e=min\ Re\left(\frac{b_h}{e_h}\right)$ $(h=1, \ldots, m)$,

और $H_{p,q}^{m,n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right]=O[\,|z|^f]$ वृहत् z के लिए

जहाँ $\sum_{j=1}^{p} e_j-\sum_{j=1}^{q} f_j<0;\ \sum_{j=1}^{n} e_j-\sum_{j=n+1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{m} f_j-\sum_{j=m+1}^{q} f_j=k>0,$

$|arg\, z|<\frac{1}{2}.k.\pi$

तथा $f=max\ Re\left(\frac{a_i-1}{e_i}\right)$ $(i=1, \ldots, n)$

आगे संक्षेपण की दृष्टि से (a_p, e_p) के द्वारा $(a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p)$ प्राचलों के समूह को प्रदर्शित किया जावेगा।

(b) समाकल[2]

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m/2}(1+x)^kP_n^m(x)\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{m/2}2^{k+m+1}.\Gamma(m+n+1).\Gamma(k+1)\Gamma(k+m+1)}{m!.\Gamma(n-m+1).\Gamma(k+n+m+2)\Gamma(k+m-n+1)}, \qquad (1\cdot2)$$

जिसमें m धन पूर्णांक है तथा $k>-m-1$.

(c) लेगेण्ड्र फलनों के लाम्बिकता गुण [4, p. 279]

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_k^m(x)\, dx = 0, \quad (k \neq n) \tag{1·3}$$

$$= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad (k=n),$$

तथा

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1} P_n^m(x) P_n^k(x)\, dx = 0, \quad (k \neq m) \tag{1·4}$$

$$= \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \quad (k=m)$$

2. **समाकल** : जिस समाकल को स्थापित करना है वह है:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\mu/2} (1+x)^k P_\gamma^\mu(x) H_{p,q}^{m,n}\left[z(1+x)^\delta \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right] dx \tag{2·1}$$

$$= \frac{(-1)^{\mu/2} 2^{k+\mu+1} \Gamma(\mu+\gamma+1)}{\mu! \Gamma(\gamma-\mu+1)} H_{p+2, q+2}^{m, n+2}\left[z.2^\delta \,\middle|\, \begin{matrix}(-k, \delta); & (-k-\mu, \delta); (a_p, e_p)\\(b_q, f_q); & (-k-\mu-\gamma-1, \delta); (-k-\mu+\nu, \delta)\end{matrix}\right],$$

जिसमें δ धन संख्या है और

$$\sum_{j=1}^{p} e_j - \sum_{j=1}^{q} f_j \leqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} e_j - \sum_{j=n+1}^{p} e_j - \sum_{j=1}^{m} f_j - \sum_{j=m+1}^{q} f_j \equiv B > 0,$$

$$|\arg z| < 1/2 B\cdot\pi, \; Re\,(k+\delta b_j/f_j) > -\mu-1, \; (j=1, \ldots, m).$$

उपपत्ति—समाकल्य में H-फलन को मेलिन बार्नीज प्रकार का समाकल (1·1) मानते हुये, समाकलन के क्रम को बदलते हुये, क्योंकि प्रक्रम में निहित समाकल परम अभिसारी है, हमें निम्नांकित की प्राप्ति होगी :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - f_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+e_j s) z^s}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+f_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - e_j s)} \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\mu/2} (1+x)^{k+s\delta}\, P_\gamma^\mu(x) \,.\, dx \,.\, ds$$

अब (1·2) की सहायता से आन्तरिक-समाकल का मान ज्ञात करने पर हमें

$$\frac{(-1)^{\mu/2}.2^{k+\mu+1}\Gamma(\mu+\nu+1)}{\mu!\Gamma(\gamma-\mu+1)}\frac{1}{2\pi i}.\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)}$$

$$.\frac{\Gamma(k+s\delta+1)\Gamma(k+s\delta+\mu+1)2^{s\delta}z^s}{\Gamma(k+s\delta+\mu+\gamma+2)\Gamma(k+s\delta+\mu-\gamma+1)}.\,ds$$

(1·1) के सम्प्रयोग से समाकल सत्यापित हो जाता है ।

3. प्रसार सूत्र: निम्नलिखित प्रसार सूत्र प्राप्त होने हैं :—

$$(1-x^2)^{\mu/2}(1+x)^k H_{p,q}^{m,n}\left[z(1+x)^\delta \middle| \begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{2^{k+\mu}(-1)^{\mu/2}}{\mu!}\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)H_{p+2,q+2}^{m,n+2}\left[2^\delta.z\middle| \begin{matrix}(-k,\delta); & (-k-\mu,\delta); (a_p,e_p)\\(b_q, f_q). & (-k-\mu-r-1,\delta); (-k-\mu+\gamma,\delta)\end{matrix}\right]P_r^{\mu}(x) \quad (3\cdot1)$$

$$(1-x^2)^{\mu/2+1}(1+x)^k H_{p,q}^{m,n}\left[z(1+x)^\delta \middle| \begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r/2}.2^{k+r+1}}{(r-1)!}H_{p+2,q+2}^{m,n+2}\left[z.2^\delta\middle| \begin{matrix}(-k,\delta); & (-k-r,\delta); (a_p,e_p)\\(b_q,f_q); & (-k-r-\gamma-1,\delta); (-k-r+\gamma,\delta)\end{matrix}\right]P_\gamma^{r}(x) \quad (3\cdot2)$$

जहाँ δ धनात्मक संख्या है तथा

$$\sum_{j=1}^{p}e_j-\sum_{j=1}^{q}f_j\leqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n}e_j-\sum_{j=n+1}^{p}e_j+\sum_{j=1}^{m}f_j-\sum_{j=m+1}^{q}f_j\equiv B>0,$$

$|\arg z|<\frac{1}{2}.B\pi,$

$Re\,[k+\delta b_j/f_j]>-\mu-1\ (j=1, \ldots, m);\ -1<x<1;\ (\mu=1, 2, \ldots)$

उपपत्ति—(3·1) को सिद्ध करने के लिए, माना कि

$$f(x)=(1-x^2)^{\mu/2}(1+x)^k H_{p,q}^{m,n}\left[z(1+x)^\delta\middle| \begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right] \quad (3\cdot3)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}C_rP_r^{\mu}(x)$$

समीकरण (3·3) विहित है क्योंकि $f(x)$ सतत है और विवृत अन्तराल $(-1, 1)$ में प्रतिबद्ध चरण वाला है। (3·3) में दोनों ओर $P_{\gamma}^{\mu}(x)$ से गुणा करने पर तथा x के सापेक्ष -1 से 1 के बीच समाकलित करने पर हमें

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\mu/2}(1+x)^k P_{\gamma}^{\mu}(x) H_{p,q}^{m,m}\left[z(1+x)^{\delta}\left|\begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} C_r\int_{-1}^{1} P_r^{\mu}(x)\, P_{\gamma}^{\mu}(x)\, dx$$

प्राप्त होगा। अब (2·1) तथा (1·3) का उपयोग करने पर

$$C_{\gamma}=\frac{(-1)^{\mu/2}2^{k+\mu}(2\gamma+1)}{\mu!}\, H_{p+2,q+2}^{m,n+2}\left[2^{\delta}z\left|\begin{matrix}(-k, \delta); & (-k-\mu, \delta); (a_p, e_p)\\(b_q, f_q); & (-k-\mu-\gamma-1, \delta); (-k-\mu+\gamma, \delta)\end{matrix}\right.\right] \tag{3·4}$$

(3·3) तथा (3·4) से सूत्र (3·1) की प्राप्ति होगी।

(3·2) को सिद्ध करने के लिए, माना कि

$$f(x)=(1-x^2)^{\mu/2+1}(1+x)^k H_{p,q}^{m,n}\left[z(1+x)^{\delta}\left|\begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right] \tag{3·5}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} C_r\, P_{\gamma}^{r}(x), \qquad (-1<x<1).$$

(3·5) में दोनों ओर $(1-x^2)^{-1}.P_{\gamma}^{\mu}(x)$ से गुणा करने पर तथा x के सापेक्ष -1 से 1 के बीच समाकलित करने पर

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\mu/2}(1+x)^k P_{\gamma}^{\mu}(x) H_{p,q}^{m,n}\left[z(1+x)^{\delta}\left|\begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} C_r\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1}P_{\gamma}^{r}(x)\, P_{\gamma}^{\mu}(x)\, dx$$

(2·1) तथा (1·4) की सहायता से हमें

$$C_{\mu}=\frac{(-1)^{\mu/2}2^{k+\mu+1}}{(\mu-1)!}\, H_{p+2,q+2}^{m,n+2}\left[z.2^{\delta}\left|\begin{matrix}(-k, \delta); (-k-\mu, \delta); & (a_p, e_p)\\(b_q, f_q); (-k-\mu-\gamma-1, \delta); & (-k-\mu+\gamma, \delta)\end{matrix}\right.\right] \tag{3.6}$$

अब सूत्र (3·2) को (3·5) तथा (3·6) से प्राप्त किया जाता है।

4. विशिष्ट दशायें: प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा H-फलन को माइजर के G-फलन, मैकराबर्ट के E-फलन तथा अन्य उच्च अबीजीय फलनों [5, p 215-222] में परिणत किया जा सकता है। फलतः ये परिणाम व्यापक प्रकृति के हैं और इसीलिये कई रोचक दशाओं को अन्तर्विष्ट कर लेते हैं। फिर भी कुछ रोचक विशिष्ट दशायें नीचे दी जा रही हैं।

(3·1) तथा (3·2) में δ को धनपूर्णांक मानने, $e_j=f_i=1 (j=1, \ldots, p;\ i=1, \ldots, q)$ के बराबर रखने तथा सूत्र

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_1, 1), \ldots, (a_p, 1)\\(b_1, 1), \ldots, (a_q, 1)\end{matrix}\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}a_1, \ldots, a_p\\b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\right]$$

के प्रयोग करने और (1·1) की सहायता से [5, p. 4, (11)] तथा [5, p. 207, (1)] सरल करने पर हमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त होंगे जिन्हे हाल ही में बाजपेयी[1] ने प्राप्त किये हैं :

$$(1-x^2)^{\mu/2}(1+x)^k\, G_{p,q}^{m,n}\left[z(1+x)^\delta \,\middle|\, \begin{matrix}a_p\\b_q\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{2^{k+\mu}(-1)^{\mu/2}}{\mu!\,\delta^{\mu+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)\, G_{p+2\delta,q+2\delta}^{m,n+2\delta}\left[2^\delta z \,\middle|\, \begin{matrix}\triangle(\delta,-k), & \triangle(\delta,-k-\mu),\ a_p\\ ,\ b_q, & \triangle(\delta,-k-\mu-r-1),\ \triangle(\delta,-k-\mu+r)\end{matrix}\right] P_r^{\mu}(x), \tag{4·1}$$

तथा

$$(1-x^2)^{\mu/2+1}1+x)^k\, G_{p,q}^{m,n}\left[z(1+x)^\delta \,\middle|\, \begin{matrix}a_p\\b_q\end{matrix}\right]$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r/2}2^{k+r+1}}{(r-1)!\,\delta^{r+1}}\, G_{p+2\delta,q+2\delta}^{m,n+2\delta}\left[2^\delta z \,\middle|\, \begin{matrix}\triangle(\delta,-k), & \triangle(\delta,-k-r);\ a_p\\ b_q, & \triangle(\delta,-k-r-\gamma-1);\ \triangle(\delta,-k-r+\gamma)\end{matrix}\right] P_\gamma(x), \tag{4·2}$$

जिसमें δ धन पूर्णांक है, संकेत $\triangle(\delta, a)$ से प्राचलों का समूह $\frac{a}{\delta}, \frac{a+1}{\delta}, \frac{a+2}{\delta}, \ldots, \frac{a+\delta-1}{\delta}$ व्यक्त होता है तथा $2(m+n)>p+q$,

$$|arg\ z|<(m+n-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\,.\,\pi,\ -1<x<1,$$

$$Re\ (k+\delta b_j)>-\mu-1\,(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

(3·1) तथा (3·2) में सर्वसमिका

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p,\ e_p)\\(b_q,\ f_q)\end{matrix}\right]=H_{q,p}^{n,m}\left[z^{-1}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-b_q,\ f_q)\\(1-a_p,\ e_p)\end{matrix}\right]$$

के प्रयोग करने से तथा $n,\ m,\ q,\ p$ को क्रमशः $q,\ l,\ p+1,\ q$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर और प्राचलों को उपयुक्त रूप से रखने पर कि सूत्र

$$H_{q+1,p}^{p,1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(1,\ 1),\ (\beta_q,\ 1)\\(\alpha_p,\ 1)\end{matrix}\right]=E\left[\begin{matrix}\alpha_p:z\\\beta_q\end{matrix}\right],$$

तो हमें

$$(1-x^2)^{\mu/2}(1+x)^k\,E\left[\begin{matrix}a_p:z(1+x)^{-\delta}\\b_q\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{2^{k+\mu}(-1)^{\mu/2}}{\mu!\,\delta^{\mu+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)\,.\,E\left[\begin{matrix}a_p;\ \triangle(\delta,\ k+1);\ \triangle(\delta,\ k+\mu+1):z2^{-\delta}\\b_q;\ \triangle(\delta,\ k+\mu+r+2;\ \triangle(\delta,\ 1+k+\mu-r)\end{matrix}\right]P_r^{\mu}(x),\tag{4·3}$$

तथा

$$(1-x^2)^{\mu/2+1}(1+x)^k\,E\left[\begin{matrix}a_p:z(1+x)^{-\delta}\\b_q\end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r/2}2^{k+r+1}}{(r-1)!\,\delta^{r+1}}\,E\left[\begin{matrix}a_p;\ \triangle(\delta,\ k+1);\ \triangle(\delta,\ 1+k+r):z2^{-\delta}\\b_q;\ \triangle(\delta,\ k+r+\mu+2);\ \triangle(\delta,\ 1+k+r-\gamma)\end{matrix}\right]P_{\gamma}^{r}(x),\tag{4·4}$$

प्राप्त होगा जहाँ δ धन पूर्ण संख्या है,

$$k-\delta>-\mu-1,\ p\geqslant q+1,\ Re\ a_j\geqslant 0\ (j=1,\ \ldots,\ p-1),$$

$$Re\ (b_i-a_i)\geqslant 0\,(i=1,\ \ldots,\ q);\ |arg\ z|<\pi,\ -1<x<1.$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० एस० डी० बाजपेयी का आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. बाजपेयी, एस० डी०। जर्न० मैथ० फिजि० साइं०, (1969) प्रेस में
2. भोंसले, बी० आर० तथा वर्मा, सी० बी० एल०। बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०, 1956, 48 (2), 103-108.
3. ब्राक्समा, बी० एल० जे०। कम्पोस० मैथ०, 1963, **15**, 239-341 .
4. एर्डेल्यी, ए०। A Tables of Integral Transforms, भाग 2, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1956.
5. वही। Higher Transcedental Functions, भाग I मैकग्रा हिल, न्यूयार्क, 1953.
6. फाक्स, सी०। ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1967, **98**, 395-428.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 4, October 1970, Pages 169-173

लाम्बिक श्रेणियों के आयलर माध्य पर

अशोक रामचन्द्र सप्रे

राजकीय उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, झाबुआ

[प्राप्त—जून 2, 1970]

सरांश

इस शोध पत्र में लाम्बिक श्रेणियों के आयलर माध्य के उपानुक्रम के अभिसरण पर दो प्रमेय सिद्ध किये गये हैं।

Abstract

On Euler means of orthogonal series. *By* Ashok Ram Chandra Sapre, Government Higher Secondary College, Jhabua.

In this paper two theorems on the convergence of subsequences of Euler means of orthogonal series have been proved.

1. माना $\{\phi_n(x)\} (n=0, 1, 2, \ldots)$

$[a, b]$ में एक प्रसामान्य लाम्बिक फलन निकाय है, अर्थात्

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\ dx = \begin{cases} 0 & \text{जब } m \neq n \\ 1 & \text{जब } m = n. \end{cases}$$

इस अध्ययन में हम ऐसी लाम्बिक श्रेणी

$$\sum_{n=0}^{\infty} an\ \phi_n(x) \tag{1·1}$$

लेंगे जिसमें

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^2n < \infty \quad \text{हो।} \tag{1·2}$$

इस श्रेणी को nवें संकल $S_n(x)$, nवें $(C, 1)$ माध्य $\sigma_n(x)$ तथा nवें $(E. 1)$ माध्य $\tau_n(x)$ को हम निम्न समीकरणों से परिभाषित करते हैं :—

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x) \tag{1·3}$$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x) \tag{1·4}$$

$$\tau_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k(x) \tag{1·5}$$

प्राकृतिक संख्याओं के एक अनुक्रम $\{\nu_n\}$ को प्रतिबन्ध (L) सन्तुष्ट करता हुआ कहा जाता है यदि

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_k} < \infty \text{ तथा } \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\nu_k} = O\left(\frac{1}{\nu_m}\right) \text{ हो,} \tag{1·6}$$

इसके साथ ही अनुक्रम $\{\nu_n\}$ यदि

$$\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geqq q > 1 \tag{1·7}$$

प्रतिवन्ध को सन्तुष्ट करता है तो उसे प्लुति अनुक्रम कहा जाता है। यह सरलता से देखा जा सकता है कि एक प्लुति अनुक्रम प्रतिवन्ध (L) सन्तुष्ट करने वाला होता है जबकि इसका विलोम सत्य नहीं है। (देखिये बारी[2] परिचयात्मक सामग्री, p. 8)

2. इस पत्र में हम आयलर माध्य के उपानक्रम के अभिसरण पर दो प्रमेय सिद्ध करेंगे। इसी प्रकार की संगत समस्या का $(C.1)$ माध्यों के लिये कोलोमोगोराफ[3] ने तथा रीभ्ज माध्यों के लिये जिगमण्ड ने[8] विस्तृत अध्ययन किया है। लाम्बिक श्रेणियों की आयलर संकलनीयता का विबेचन जे० मेडर[4, 5] तथा ओ० भिभा[9] ने किया है।

3. प्रमेय 1 :— यदि $\sum_{n=0}^{\infty} a^2_n < \infty$ हो

तथा सूचक अनुक्रम $\{\nu_n\}$ जिसमें $\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geqq q > 1$ प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता हो तो $[a, b]$ में प्रायः सर्वत्र

$$S_{\nu n}(x) - \tau_{\nu n}(x) = 0_x(1) \text{ होगा।}$$

उपपत्ति :— हम लिख सकते हैं कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} [S_{\nu n}(x) - \tau_{\nu n}(x)]^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} [S_{\nu n}(x) - \sigma_{\nu n}(x)]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [\sigma_{\nu n}(x) - \tau_{\nu n}(x)]^2 \quad |$$

दक्षिण पक्ष के प्रथम श्रेणी का अभिसरण कोलमोगोराफ[3] ने सिद्ध किया है (अथवा देखिये अलेक्सीट[1] प्रमेय 2. 7. 1 p. 118) अतः द्वितीय श्रेणी का अभिसरण दिखाना पर्याप्त है।
यह [देखिये मेडर[4] p. 142] सिद्ध किया जा चुका है कि :

$$\int_a^b [\sigma_n(x)-\tau_n(x)]^2\, dx < \frac{A}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 a^2_k \text{ (}A \text{ एक परम स्थिरांक है।}$$

उपर्युक्त सूत्र में n के स्थान पर ν_n रखने के बाद हम लिख सकते हैं :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [\sigma_n(x)-\tau_n(x)]^2\, dx < A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n^2} \sum_{k=1}^{\nu_n} k^2 a^2_k \leqq A \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a^2_k \sum_{\nu_n \geqq k}^{\infty} \frac{1}{\nu_n^2} \qquad (3\cdot1)$$

$$\leqq A \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a^2_k \cdot \frac{1}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} q = B \sum_{k=1}^{\infty} a^2_k < \infty$$

अतः लीवी के प्रमेयानुसार (देखिये अलेक्सीट[1] p. 11) श्रेणी $\Sigma[\sigma_{\nu n}(x)-\tau_{\nu n}(x)]^2$ का $[a, b]$ में प्रायः सर्वत्र अभिसरण सिद्ध होता है जिससे हम $\Sigma[S_{\nu n}(x)-\tau_{\nu n}(x)]^2$ के $[a, b]$ में प्रायः सर्वत्र अभिसरण का निष्कर्ष निकाल सकते हैं। अर्थात् हम लिख सकते हैं

$$S_{\nu n}(x)-\tau_{\nu n}(x)=o_x(1)$$

$[a, b]$ में प्रायः सर्वत्र।

द्वितीय प्रमेय में हम दर्शाना चाहते हैं कि प्रमेय एक में अनुक्रम $\{\nu_n\}$ पर लगाया गया प्रतिबन्ध और शिथिल किया जा सकता है।

प्रमेय 2 :— यदि $\Sigma a^2_n < \infty$ हो तथा सूचक अनुक्रम $\{\nu_n\}$ (L) प्रतिबन्ध सन्तुष्ट करता हो तो $[a, b]$ में प्रायः सर्वत्र $S_{\nu n}(x)-\tau_{\nu n}(x) = o_x(1)$ होगा।

उपपत्ति :– पूर्व की तरह लिखा जा सकता है कि:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [S_{\nu n}(x)-\tau_{\nu n}(x)]^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} [S_{\nu n}(x)-\sigma_{\nu n}(x)]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [\sigma_{\nu n}(x)-\tau_{\nu n}(x)]^2$$

दक्षिण पक्ष के प्रथम श्रेणी के प्रमेय की ग्राह्य परिकल्पना के आधार पर लेखक ने अभिसरण सिद्ध किया है (देखिये सप्रे[7]) अतः द्वितीय श्रेणी का अभिसरण दिखाना पर्याप्त है।

(3·1) से हम लिख सकते हैं ;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [\sigma_{\nu n}(x)-\tau_{\nu n}(x)]^2\, dx < A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_n^2} \sum_{k=1}^{\nu n} k^2 a^2_k$$

हम उपर्युक्त श्रेणी का अभिसरण उसका p पदों तक संकल ज्ञात करके दिखावेंगे :

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{\nu_n^2} \sum_{k=1}^{\nu n} k^2 a^2_k = \frac{1}{\nu_1^2} \sum_{k=1}^{\nu_1} k^2 a^2_k + \frac{1}{\nu^2_2} k^2 a^2_k + \ldots + \frac{1}{\nu_p^2} \sum_{k=1}^{\nu p} k^2 a^2_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu_1} k^2 a^2_k \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\nu_i^2} + \sum_{k=\nu_1+1}^{\nu_2} k^2 a^2_k \sum_{i=2}^{p} \frac{1}{\nu_1^2} + \sum_{k=\nu_{p_1}+1}^{\nu p} k^2 a^2_k \cdot \frac{1}{\nu^2_p}$$

अनुक्रम $\{\nu_n\}$ (L) प्रतिबन्ध सन्तुष्ट करता है, अनुक्रम $\{\nu_n^2\}$ भी (L) प्रतिबन्ध सन्तुष्ट करेगा। (देखिये बारी[2] p. 8)

अर्थात् $\quad \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\nu_i^2} < \frac{C}{\nu_1^2} ; \sum_{i=2}^{p} \frac{1}{\nu_i^2} < \frac{C}{\nu_2^2} ; \ldots\ldots$

अतः $\quad \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{\nu_n^2} \sum_{k=1}^{\nu n} k^2 a^2_k \leq \sum_{k=1}^{\nu_1} k^2 a^2_k \cdot \frac{C}{\nu_1^2} + \sum_{k=\nu_1+1}^{\nu_2} k^2 a^2_k \cdot \frac{C}{\nu_2^2} + \ldots + \sum_{k=\nu_{p-1}+1}^{\nu p} k^2 a^2_k \cdot \frac{C}{\nu^2_p}$

$$< C \left\{ \sum_{k=1}^{\nu_1} a^2_k + \sum_{k=\nu_1+1}^{\nu_2} a^2_k + \ldots + \sum_{k=\nu_{p-1}+1}^{\nu p} a^2_k \right\}$$

$$= C \left\{ \sum_{k=1}^{\nu p} a^2_k \right\} < \infty$$

अतः $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b [\sigma_{\nu n}(x) - \tau_{\nu n}(x)]^2 \, dx < \infty$

लिवी के प्रमेयानुसार $\quad \sum_{n=1}^{\infty} [\sigma_{\nu n}(x) - \tau_{\nu n}(x)]^2 < \infty$

इस पर से $\Sigma[S_{\nu n}(x) - \tau_{\nu n}(x)]^2$ श्रेणी का अभिसरण सिद्ध होता है जिससे हमारा निष्कर्ष सरलता से निकलता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डॉ० सी० एम० पटेल का मार्ग दर्शन हेतु आभारी हूँ।

निर्देश

1. अलेक्सीट, जी०। Convergence Problems of Orthogonal Series. **पर्गमान प्रेस**, 1961
2. बारी, एन० के०। A Treatise on Trignometrical Series **पर्गमान प्रेस**, 1963.

3. कोलमोगोराफ, ए० । **फण्डामेन्टा मैथ०**, 1923, **5**, 96-97.

4. मेडर, जे० । Annales Polonici Mathematici, 1958, **V**, 135-48.

5. मेडर, जे० । Bul. Acad. Poloh. Sce. Ser. Sci. Math. Astr. Fiz. 1959, **7**, 589.

6. पटेल, सी० एम० । **मैथमेटिक वेस्निक**, 1968, 5, (20) 218-20

7. सप्रे, अ० रा० । **मैथमेटिक्स स्टूडेन्ट (प्रकाशनाधीन)**

8. त्सिंगमण्ड, ए० । **Bulletin** Intern. AcadoPo!onaise **Sci.** Letteres (Cracovices) **Series A,** 1927, 293-308

9. झिझा, ओ० रा० । **डाकलेडी अकादमी नाउक, एस० एस० आर०** 1962, **143**, 1257-1279

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 4, October 1970, Pages 175-180

श्वेत वामन किस्म के तारों में संघनित द्रव्य के सम्बन्ध में

आर० एस० गुप्ता तथा जे० पी० शर्मा
गणित विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—सितम्बर 12, 1970]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में एक संघनित तारे के लिये (एक समान घनत्व वाले गोले के सापेक्ष) परम शून्य पर प्रति इकाई आयतन में सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा, आन्तरिक ऊर्जा तथा इलेक्ट्रॉनों की सम्पूर्ण ऊर्जा (लघु इलेक्ट्रॉनीय संकेन्द्रण के लिये) के व्यंजक दिये गये हैं।

Abstract

On a condensed star. *By* R. S. Gupta and J. P. Sharma, Department of Mathematics, University of Allahabad.

In this paper expressions for the total kinetic energy per unit volume, the internal energy and the total energy of the electrons (for small electronic concen trations) at absolute zero for a condensed star (corresponding to a sphere of uniform density) have been given.

भूमिका : आपेक्षिकता संहति परिवर्तन की उपेक्षा करने पर एक समान घनत्व वाले गोले के सापेक्ष एक आदर्श तारे के इलेक्ट्रॉनों की सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा निम्न व्यंजक[1] द्वारा प्राप्त होती है :

$$E_k = nv\epsilon = nv\frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2n^{2/3}}{m}, \tag{1}$$

जहाँ

$$\epsilon = \frac{3}{40}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2n^{2/3}}{m} \tag{2}$$

तथा

v=आदर्श तारे का आयन,

m=इलेक्ट्रॉन की संहति,

n=प्रति इकाई आयतन में इलेक्ट्रॉनों की संख्या

सूर्य की संहति के लगभग आधे संहति वाले (अर्थात $M \sim \frac{1}{2}M_s$)तारों के लिये, जिनके संकेन्द्रण n बहुत अधिक नहीं हैं, (जैसा कि एण्डर्सन द्वारा दिखाया गया है) संबंध (1) मान्य होता है । अधिक संकेद्रण के लिये आपेक्षिकता प्रभाव को भी ध्यान में रखना है । अतः फर्मी-डिराक सांख्यिकी के अन्तर्गत इलेक्ट्रॉनों को गैस मानते हुयें स्टोनर ने अपने परिणामों को निम्नांकित परिवर्तित रूप में रक्खा:

$$E_k = \frac{8\pi v m_0^4 c^5}{h^3}\left[\tfrac{1}{8}x(1+x^2)^{1/2}(1+2x^2) - \tfrac{1}{8}\log\{x+(1+x^2)^{1/2}\} - \frac{x^3}{3}\right], \quad (3)$$

तथा $(E_k)_{x>>1} = \frac{2\pi v m_0^4 c^5}{h^3} x^4$ (4)

प्राप्त किया जहाँ $x = \frac{h}{m_0 c}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} n^{1/3}$. (5)

यह विचार कि समीकरण (1) इलेक्ट्रॉनों के लघु संकेन्द्रण के लिये मान्य है, इससे ऐसा प्रतीत होता है कि आपेक्षिकीय यांत्रिकी इलेक्ट्रॉनों के अधिक संकेन्द्रण के लिये सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा को ज्ञात करने में सहायक है [जैसा (3) द्वारा व्यक्त किया गया] । परन्तु स्थिति भिन्न दिखाई पड़ती है अर्थात् आपेक्षिकता संहति परिवर्तन इलेक्ट्रॉनों के लघु संकेन्द्रण के लिये भी अत्यधिक सहायक है, जिसको निम्न प्रकार से समझा जा सकता है ।

प्रथम बार लॉरेंट्स द्वारा व्युत्पन्न इलेक्ट्रॉन संहति के लिये, वेग-प्राश्रित संहति का व्यंजक

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \text{ है।} \quad (6)$$

जहाँ $\beta = \frac{v}{c}$; c=प्रकाश-वेग$=2{\cdot}998\times10^{10}$ सेमी०/से०

एक आदर्श श्वेत वामन प्रकार के तारे के (लगभग 106 या 108 ग्रा० प्र० घ० सें०^3 क्रम के घनत्व वाले) किसी इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा परम शून्य पर

$$\epsilon = \left(\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} - 1\right)m_0 c^2 \quad (7)$$

द्वारा व्यक्त की जाती है । समीकरण की सहायता से, दिये गये इलेक्ट्रॉन के संवेग

$$p = mv \quad (8)$$

को पुनः

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \quad (9)$$

द्वारा व्यक्त किया जा सकता है । (7) को (9) से भाग देने पर तथा लघु सरलीकरण करने से हमें

$$v = \frac{pc^2}{\epsilon}\left\{1-(1-\beta^2)^{1/2}\right\} \tag{10}$$

प्राप्त होता है। लघु β के लिये घात-श्रेणी-प्रसार द्वारा, हमें

$$v = \frac{2\epsilon}{p} \tag{11}$$

प्राप्त होता है । समीकरण (4) तथा (11) को एक में लेने पर विराम-द्रव्यमान m_0

$$m_0 = \frac{1}{c^2}\left\{\frac{\epsilon(p^2c^2-4\epsilon^2)^{1/2}}{pc-(p^2c^2-4\epsilon^2)^{1/2}}\right\} \tag{12}$$

रूप में प्राप्त होता है । यदि $m_0=0$ (आपेक्षिकता प्रभाव को लघु संकेन्द्रण के लिये उपेक्षा करने पर) तब हमें (12) से शीघ्र ही

$$p = \frac{2}{c}\epsilon \tag{13}$$

प्राप्त होता है । तब एक संघनित तारे की प्रति इकाई आयतन में इलेक्ट्रॉनो के अधिकतम संवेग p_0 वाली गतिज ऊर्जा

$$E = \frac{E_k}{v} = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^{p_0}\epsilon p^2\,dp$$

$$= \frac{4\pi c}{h^3}\int_0^{p_0} p^3\,dp, \qquad \text{क्योंकि} \quad \epsilon = \frac{c}{2}\,p. \tag{14}$$

यदि हम परिभाषित करें

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{p}{mc}, \ \text{(i)} \\ x &= \frac{p_0}{mc} \ \ \text{(ii)} \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

तब (14) निम्न रूप में परिवर्तित हो जाता है ।

$$E = 4\pi\left(\frac{mc}{h}\right)^3 mc^2\int_0^x y^3\,dy \tag{16}$$

मान लिया

$$n = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^{p_0} p^2\,dp = \frac{8\pi p_0^3}{3h^3}; \tag{17}$$

समाकल (16) का मूल्यांकन करने पर हमें

$$E=\frac{\pi(mc)^5}{mh^3}x^4 \tag{18}$$

प्राप्त होता है। (15) के द्वितीय समीकरण तथा (17) से स्पष्ट है कि x और n क्रमश:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{h}{mc}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3}n^{1/3}, \\ n&=\left(\frac{mc}{h}\right)^3\left(\frac{8\pi}{3}\right)x^3 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

द्वारा संबंधित हैं। समीकरण (18) में अवर राशियों

$$\left.\begin{aligned} \pi&=3\cdot143; & m&=9\cdot01\times10^{-28}, \\ c&=2\cdot998\times10^{10}; & h&=6\cdot55\times10^{-27} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

के संख्यात्मक मूल्यों को रखने पर हमें

$$E=1\cdot785\times10^{23}x^4 \tag{20}$$

प्रप्त होता है। दो विभिन्न विधियों द्वारा प्राप्त परिणाम (4) और (18) की अनुरूपता ध्यान देने योग्य है ; अन्तर केवल इतना है कि पहला परिणाम (अनापेक्षिकीय विवेचन के अन्तर्गत) घटता है जब कि बाद वाला परिणाम लघु संकेद्रण के लिये मान्य है (आपेक्षिकीय प्रभाव लगभग उपेक्षणीय है)। $x<<1$ के लिये समीकरण (20) के द्वारा E की गणना की जा सकती है जहाँ $n<<\frac{8\pi}{3}\left(\frac{mc}{h}\right)^3$ या $n<<5\cdot882\times10^{28}$. लघु इलेट्रॉनीय संकेन्द्रण परिसर के प्रभाव की उपेक्षा करने पर, इलेट्रॉन गैस के संवेग तथा अधिकतम संवेग की धारणा का प्रयोग करते हैं तो व्यंजक (20), (1) के रूपान्तर के रूप में प्राप्त होता है। संबंध (20) से यह भी स्पष्ट है कि प्रति इकाई में सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा $n^{4/3}$ की समानुपाती है।

आन्तरिक ऊर्जा—व्युत्क्रम वर्ग-नियम (अनापेक्षिकीय विवेचन के अन्तर्गत) के प्रभाव में घूमते हुये इलेक्ट्रॉन कणों के समूह के लिये सन्तुलन प्रतिबंध[2]

$$2E_K+E_G=0 \tag{21}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है, जहाँ E_G गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा तथा E_K गतिज ऊर्जा है। साधारणतया हम संबंध (21) को "वीरियल प्रमेय" कहते हैं। एक समान घनत्व के गोले के लिये[3]

$$E_G=-\tfrac{1}{2}G\,\frac{M^2}{r}, \tag{22}$$

जहाँ G गुरुत्वीय नियतांक, M संहति तथा r अर्द्धव्यास है। "वीरियल प्रमेय" के उपयोग से स्पष्ट है कि[4]

$$T=\tfrac{3}{2}(\gamma-1)U, \tag{23}$$

जहाँ $T=E_K$ गतिज ऊर्जा, U इलेक्ट्रॉन संहति की ग्रान्तरिक ऊर्जा तथा γ विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात है। समीकरण (21), (22) तथा (23) से हमें

$$U=\frac{1}{G(\gamma-1)}\frac{GM^2}{r} \tag{24}$$

प्राप्त होता है। परन्तु एकसमान घनत्व[5] वाले गोले के सापेक्ष एक संघनित तारे के लिये

$$M=\tfrac{4}{3}\pi r^3(2\cdot5\ m_H n), \tag{25}$$

जहाँ m_H हाइड्रोजन परमाणु की संहति है ; ग्रतः समीकरण (24) से

$$U=\frac{1}{6}\ \frac{GM^{5/3}}{(\gamma-1)}\left\{(2\cdot5 m_H n\ (\tfrac{4}{3}\pi)\right\}^{1/3}, \tag{26}$$

प्राप्त होता है। परन्तु चरम घनत्व पर[3]

$$\left.\begin{aligned} n&=\frac{(\frac{1}{3}\pi GM)^3\ m_H{}^4 M^2}{h^6}5\cdot785\times10^3\\ &=1\cdot387\times10^{-37}M^2\end{aligned}\right\}, \tag{27}$$

($G=6\cdot66\times10^{-8}$ तथा $m_H=1\cdot662\times10^{-24}$). n के इस मान को समीकरण (26) में रखने पर

$$U=1\cdot489\times10^{-28}\frac{M^{7/3}}{(\gamma-1)} \tag{28}$$

प्राप्त होता है। अन्त में

$$U=7\cdot502\times10^{49}\ \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{M}{M_S}\right)^{7/3}, \tag{29}$$

जहाँ $M_S=2\cdot0\times10^{33}$=सूरज की संहति।

सम्पूर्ण ऊर्जा—ग्रत्यधिक घनत्व पर परमाणवीय न्यूक्लियस ग्रौर स्वतंत्र इलेक्ट्रॉनों वाले ग्रायनित द्रव्य से बने हुये एक समान घनत्व वाले गोले के सापेक्ष तारे का परम शून्य पर सम्पूर्ण ऊर्जा समीकरण

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{सम्पूर्ण}}&=U+E_G\\ &=1\cdot489\times10^{-28}\left(\frac{3\gamma-4}{1-\gamma}\right)M^{7/3}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

द्वारा दी जाती है। तारे की संहति को सूरज की संहति के ग्रंश के रूप में प्रदर्शित करने पर, समीकरण को पुनः निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$E_{\text{सम्पूर्ण}}=7\cdot502\times10^{49}\frac{3\gamma-4}{1-\gamma}\left(\frac{M}{M_S}\right)^{7/3}. \tag{31}$$

(29) तथा (31) की तुलना करने पर हमें

$$E_{\text{सम्पूर्ण}} = -(3\gamma - 4) U \tag{32}$$

प्राप्त होता है, जहाँ U को (29) द्वारा व्यक्त किया जा चुका है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

श्री जे० पी० शर्मा जूनियर फेलोशिप प्रदान किये जाने हेतु विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का अत्यन्त ही आभारी है।

निर्देश

1. स्टोनर, ई० सी०। **फिला० मैग०**, 1930, **9**, 944.
2. स्टोनर, ई० सी०। **फिला० मैग०**, 1931, 986.
3. गुप्ता, आर० एस० तथा शर्मा जे० पी०। **द मैथ० स्टूडे० में प्रकाशनार्थ स्वीकृत**
4. चन्द्रशेखर, एस०। An Introduction to the study of Stellar Structure **(शिकागो : शिकागो प्रेस विश्वविद्यालय)**, 1939, पृ० 52, **समी०** 96.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 4, October 1970, Pages 181-189

दो चर-राशियों के व्यापक फलन के कतिपय नवीन दोहरी-श्रेणी में विस्तार

पी० सी० जैन
गणित-विभाग, राजकीय महाविद्यालय, कोटपुतली (जयपुर)

[प्राप्त—सितम्बर 10, 1969]

सारांश

प्रस्तुत शोध-पत्र का उद्देश्य शर्मा[5] द्वारा पारिभाषित दो चर-राशियों के व्यापक फलन के चार नवीन दोहरी श्रेणी में विस्तारों को सिद्ध करना है। उपपत्ति में हम नये सांकेतिक आपरेटरों का उपयोग करेंगे जो नीचे पारिभाषित किये गये हैं। विशिष्ट दशा में हमें ऐपेल फलनों के रोचक द्विपद विस्तार तथा कुछ अन्य विस्तार भी प्राप्त होते हैं।

Abstract

Some new double-series expansions of the generalised function of two variables. *By* P. C. Jain, Lecturer in Mathematics, Government College, Kotputli, (Jaipur.)

The object of this paper is to prove four new double series expansions of the generalised function of two variables defined by Sharma.[5] In the proof we employ new symbolic operators as defined below. In particular we get interesting double series expansion of Appell's functions and also some other expansions.

दो चर-राशियों के व्यापक फलन की परिभाषा नीचे दी जाती है :—

$$S\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} m_1, & 0 \\ p_1-m_1, & q_1 \end{bmatrix} & a_1, a_2, \ldots, a_{p_1}; b_1, b_2, \ldots, b_{q_1} \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2 \end{pmatrix} & c_1, c_2, \ldots, c_{p_2}; d_1, d_2, \ldots, d_{q_2} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ p_3-n_3, & q_3-n_3 \end{pmatrix} & e_1, e_2, \ldots, e_{p_3}; f_1, f_3, \ldots, f_{q_3} \end{array}\right| \begin{array}{c} x, \\ \\ y \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(a_j+s+t) \prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(1-c_j+s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(d_j-s)}{\prod_{j=m_1+1}^{p_1} \Gamma(1-a_j-s-t) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(b_j+s+t) \prod_{j=m_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j-s)} \times$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(1-e_j+t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(f_j-t)}{\prod_{j=n_2+1}^{q_2} \Gamma(1-d_j+s) \prod_{j=m_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j-t) \prod_{j=n_3+1}^{q_3} \Gamma(1-f_j+t)} \; x^s y^t \, ds \, dt \tag{1}$$

जहाँ L_1, L_2 दो समुचित कन्टूर हैं और धनात्मक पूर्णांक निम्न प्रतिबन्धों को तुष्ट करते हैं :— $q_2 \geqslant 1$, $q_3 \geqslant 1$, $p_1, q_1 \geqslant 0$, $0 \leqslant m_1 \leqslant p_1$, $0 \leqslant m_2 \leqslant p_2$, $0 \leqslant n_2 \leqslant q_2$, $0 \leqslant m_3 \leqslant p_3$, $0 \leqslant n_3 \leqslant q_3$, $p_1+p_2 \leqslant q_1+q_2$, $p_1+p_3 \leqslant q_1+q_3$. $x=y=0$ मान को छोड़ दिया जाता है ।

निम्नांकित सूत्रों के प्रयोग से

$$F_1(a;\, b,\, b';\, c;\, 1,\, 1) = \frac{\Gamma(c)\; \Gamma(c-a-b-b')}{\Gamma(c-a)\, \Gamma(c-b-b')} \tag{2}$$

[3, p. 12]

$$F\begin{bmatrix} 2 & \alpha, \beta & \\ 1 & -m; -n & 1, \\ 2 & \gamma,\, 1+\alpha+\beta+\gamma-m-n & 1 \\ 0 & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \end{bmatrix} = \frac{(\gamma-\alpha)_{m+n}\, (\gamma-\beta)_{m+n}}{(\gamma)_{m+n}\, (\gamma-\alpha-\beta)_{m+n}} \tag{3}$$

[3, p. 13]

$$F\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1, \\ 2 & -m, \beta, \qquad -n, \beta' & \\ 1 & \gamma & 1 \\ 1 & 1+\alpha+\beta-\gamma-m;\; 1+\alpha+\beta'-\gamma-n & \end{bmatrix} = \frac{(\gamma-\alpha)_{m+n}\, (\gamma-\beta)_m\, (\gamma-\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}\, (\gamma-\alpha-\beta)_m\, (\gamma-\alpha-\beta')_n} \tag{4}$$

जहाँ $\qquad (a)_m \equiv \dfrac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}$

हम अपने नवीन सांकेतिक आपरेटरों को निम्न प्रकार से पारिभाषित करते हैं :—

$$\nabla(h, k)=\frac{\Gamma(k)\Gamma(k-h+\delta+\delta')}{\Gamma(k-h)\,\Gamma(k+\delta+\delta')}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(h)_{r+s}(-\delta)_s(-\delta')_s}{(k)_{r+s}\,r!\,s!} \tag{5}$$

$$\triangle(h, k)=\frac{\Gamma(k-h)\Gamma(k+\delta+\delta')}{\Gamma(k)\,\Gamma(k-h+\delta+\delta')}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(h)_{r+s}(-\delta)_r(-\delta')_s}{(1-k+h-\delta-\delta')_{r+s}\,r!\,s!} \tag{6}$$

$$\nabla(\alpha, \beta, \gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha+\delta+\delta')\Gamma(\gamma-\beta+\delta+\delta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma+\delta+\delta')\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+\delta+\delta')}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{r+s}(\beta)_{r+s}(-\delta)_r(-\delta')_s}{(\gamma)_{r+s}(1+\alpha+\beta-\gamma-\delta-\delta')_{r+s}\,r!\,s!}$$

$$\nabla^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)=\nabla(-\alpha, \beta, \gamma-\alpha) \tag{7}$$

$$\nabla(\alpha, \beta, \beta', \gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\beta')}\times$$

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha+\delta+\delta')\Gamma(\gamma-\beta+\delta)\Gamma(\gamma-\beta'+\delta')}{\Gamma(\gamma+\delta+\delta')\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+\delta)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta'+\delta')}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{r+s}(\beta)_r(\beta')_s(-\delta)_r(-\delta')_s}{(\gamma)_{r+s}(1+\alpha+\beta-\gamma-\delta)_r(1+\alpha+\beta'-\gamma-\delta')_s}\cdot\frac{1}{r!}\cdot\frac{1}{s!}$$

$$\nabla^{-1}(\alpha, \beta, \beta', \gamma)=\nabla(-\alpha, \beta, \beta', \gamma-\alpha) \tag{8}$$

जहाँ $\delta\equiv x\frac{\partial}{\partial x}$ तथा $\delta'\equiv y\frac{\partial}{\partial y}$.

अब निम्न सम्बन्ध सरलता से प्राप्त हो जाते हैं :—

$$\triangle(h, k)\,S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1, & o\\ p_1-m_1, & q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, & n_2\\ p_2-m_2, & q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, & n_3\\ p_3-m_3, & q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_{p_1}; b_{q_1}\\ c_{p_2}; d_{q_2}\\ e_{p_3}; f_{q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x,\\ y\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-h)}$$

$$\times S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1+1, & o\\ p_1-m_1, & q_1+1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, & n_2\\ p_2-m_2, & q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, & n_3\\ p_3-m_3, & q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_{p_1}, k-h; b_{q_1}, k\\ c_{p_2}; d_{q_2}\\ e_{p_3}; f_{q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x,\\ y\end{matrix}\right] \tag{9}$$

जहाँ a_p का अर्थ प्राचलों की श्रेणी $a_1, a_2\, a_3 \ldots a_{p_2}$ से है ।

$$\triangle(h,k)\, S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1, & o \\ p_1-m_1, & q_1\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix} a_p;\ b_{q_1} \\ c_{p_2};\ d_{q_2} \\ e_{p_3};\ f_{q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix} x, \\ y\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(k-h)}{\Gamma(k)}\times$$

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1+1, & o \\ p_1-m_1, & q_1+1\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix} a_{p_1}, k;\ b_{q_1}, k-h \\ c_{p_2};\ d_{q_2} \\ e_{p_3};\ f_{q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix} x, \\ y\end{matrix}\right] \qquad (10)$$

$$\nabla(\alpha, \beta, \gamma) S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1, & o \\ p_1-m_1, & q_1\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix} a_{p_1};\ b_{q_1} \\ c_{p_2};\ d_{q_2} \\ e_{p_3};\ f_{q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix} x, \\ y\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

$$\times S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1+2, & o \\ p_1-m_1, & q_1+2\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ p_2-m_2 & q_2-n_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix} a_{p_1}, \gamma-\alpha, \gamma-\beta;\ b_{q_1}, \gamma, \gamma-\alpha-\beta \\ c_{p_2};\ d_{q_2} \\ e_{p_3};\ f_{q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix} x, \\ y\end{matrix}\right] \qquad (11)$$

$$\nabla(\alpha, \beta, \beta', \gamma)\, S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} m_1 & o \\ p_1-m_1, & q_1\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix} a_{p_1};\ b_{q_1} \\ c_{p_2};\ d_{q_2} \\ e_{p_3};\ f_{q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix} x, \\ y\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\beta')}$$

$$\times S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1+1, & o\\ p_1-m_1, & q_1+1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2+1, & n_2\\ p_2-m_2, & q_2-n_2+1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3+1, & n_3\\ p_3-m_3, & q_3-n_3+1\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_{p_1}, \gamma-\alpha; b_{q_1}, \gamma\\ 1+\beta-\gamma, c_{p_2}; d_{q_2}, 1+\alpha+\beta-\gamma\\ 1+\beta'-\gamma, e_{p_3}; f_{q_3}, 1+\alpha+\beta'-\gamma\end{matrix}\right|\begin{matrix}x,\\ y\end{matrix}\right] \tag{12}$$

अब समीकरण (5) से (8) तथा सूत्र [7, p. 84, Equ. (7)]

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p dx^q} S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1, & o\\ p_1-m_1, & q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, & n_2\\ p_2-m_2, & q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, & n_3\\ p_3-m_3, & q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_{p_1}; b_{q_1}\\ c_{p_2}; d_{q_2}\\ e_{p_3}; f_{q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x,\\ y\end{matrix}\right]$$

$$= S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1, & o\\ wp_1-_1, & q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2+1, & n_2\\ p_2-m_2, & q_2-n_2+1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3+1, & n_3\\ p_3-m_3, & q_3-n_3+1\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_{p_1}+p+q; b_{q_1}+p+q\\ -p, c_{p_2}-p; d_{q_2}-p, o\\ -q, e_{p_3}-q; f_{q_3}-q, o\end{matrix}\right|\begin{matrix}x,\\ y\end{matrix}\right] \tag{13}$$

के समीकरण (9) का (12) में प्रयोग से निम्न विस्तार-सूत्र प्राप्त होते हैं :—

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1, & o\\ p_1-m_1 & q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, & n_2\\ p_2-m_2 & q_2-n_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, & n_3\\ p_3-m_3 & q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_{p_1}; b_{q_1}\\ c_{p_2}; d_{q_2}\\ e_{p_3}; f_{q_3}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x,\\ y\end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-h)} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_{r+s}}{r!\,s!} x^r y^s$$

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}m_1+1, & o\\ p_1-m_1, & q_1-n_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2+1, & n_2\\ p_2-m_2, & q_2-n_2+1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3+1, & n_3\\ p_3-m_3, & q_3-n_3+1\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_{p_1}+r+s, k-h; b_{q_1}+r+s, k+r+s\\ -r, c_{p_2}-r; d_{q_2}-r, o\\ -s, e_{p_3}-s; f_{q_3}-s, o\end{matrix}\right|\begin{matrix}x,\\ y\end{matrix}\right] \tag{14}$$

$$= \frac{\Gamma(k-h)}{\Gamma(k)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_{r+s}}{(k)_{r+s}} \cdot \frac{(-x)^r\,(-y)^s}{r\,!\,s\,!}$$

$$S\left[\begin{array}{l|l|l} \begin{bmatrix} m_1+1, & o \\ p_1-m_1, & q_1+1 \end{bmatrix} & a_{p_1}+r+s,\ k+r+s;\ b_{q_1}+r+s,\ k-h+r+s & x, \\ \begin{pmatrix} m_2+1, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2+1 \end{pmatrix} & -r,\ c_{p_2}-r;\ d_{q_2}-r,\ o & y \\ \begin{pmatrix} m_3+1, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3+1 \end{pmatrix} & -s,\ e_{p_3}-s;\ f_{q_3}-s,\ o & \end{array}\right] \tag{15}$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\ \Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\ \Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_{r+s}\ (\beta)_{r+s}}{r\,!\,s\,!\,(\gamma-\alpha)_{r+s}} x^r\, y^s \times$$

$$S\left[\begin{array}{l|l|l} \begin{bmatrix} m_1+2, & o \\ p_1-m_1, & q_1+2 \end{bmatrix} & a_{p_1}, +r+s,\ \gamma-\alpha+r+s,\ \gamma-\beta;\ b_{q_1}+r+s, \\ & \qquad \gamma+r+s,\ \gamma-\alpha-\beta+r+s & x, \\ \begin{pmatrix} m_2+1, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2+1 \end{pmatrix} & -r,\ c_{p_2}-r;\ d_{q_2}-r,\ o & y \\ \begin{pmatrix} m_3+1, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3+1 \end{pmatrix} & -s,\ e_{p_3}-s;\ f_{q_3}-s,\ o & \end{array}\right] \tag{16}$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\ \Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\ \Gamma(\gamma-\beta)\ \Gamma(\gamma-\beta')} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_{r+s}\ (\beta)_r\ (\beta')_s}{r\,!\,s\,!\ (\gamma-\alpha)_{r+s}} x^r \cdot y^s$$

$$S\left[\begin{array}{l|l|l} \begin{bmatrix} m_1+1, & o \\ p_1-m_1, & q_1+1 \end{bmatrix} & a_{p_1}+r+s,\ \gamma-\alpha+r+s;\ b_{q_1}+r+s,\ \gamma+r+s & x, \\ \begin{pmatrix} m_2+2, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2+2 \end{pmatrix} & -r,\ 1+\beta-\gamma,\ c_{p_2}-r;\ d_{q_2}-r,\ 1+\alpha+\beta-\gamma-r,\ o & y \\ \begin{pmatrix} m_3+2, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3+2 \end{pmatrix} & -s,\ 1+\beta'-\gamma,\ e_{p_3}-s;\ f_{q_3}-s,\ 1+\alpha+\beta'-\gamma-s,\ o & \end{array}\right] \tag{17}$$

जो कि S-फलन की परिभाषा में दिये गये प्रतिबन्धों के तुष्ट होने पर ही वैध हैं ।

3. विशिष्ट दशायें :—सूत्र [6]

$$S\left[\begin{array}{l|l|l} \begin{bmatrix} m, & o \\ o, & n \end{bmatrix} & a_m; \qquad b_n & x, \\ \begin{pmatrix} l, & 1 \\ o, & p \end{pmatrix} & 1-c_l;\ 1-d_p,\ o & y \\ \begin{pmatrix} l, & 1 \\ o, & p \end{pmatrix} & 1-e_l;\ 1-b_p,\ o & \end{array}\right] = \frac{\Gamma[(m_a)]\,\Gamma[(c_l)]\,\Gamma[(e_l)]}{\Gamma[(b_n)]\,\Gamma[(d_p)]\,\Gamma[(f_p)]}\ F\left[\begin{array}{c|c|c} m & a_m & -x, \\ l & c_l;\ e_l & -y \\ n & b_n & \\ p & d_p;\ f_p & \end{array}\right] \tag{18}$$

का समीकरण (14) में प्रयोग से जे० काम्पे डी फेरियेट के फलन[1] का विस्तार प्राप्त होता है :—

$$F\left[\begin{array}{c|c|c} m & a_m & x, \\ l & c_l;\ e_l & \\ n & b_n & y \\ p & d_p; f_p & \end{array}\right] = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_{r+s}\ [(a_m)]_{r+s}\ [(c_l)]_r\, [(e_l)]_s}{(k)_{r+s}\, [(b_n)]_{r+s}\, [(d_p)]_r\, [(f_p)]_s} \cdot \frac{x^r \cdot y^s}{r!\ s!}$$

$$F\left[\begin{array}{c|c|c} m+1 & (a_m)+r+s,\ k-h & x, \\ l & (c_l)+r;\ (e_l)+s & \\ n+1 & (b_n)+r+s, k+r+s & y \\ p & (d_p)+r;\ (f_p)+s & \end{array}\right] \tag{19}$$

समीकरण (15), (16), (17) से भी इसी प्रकार के सूत्र प्राप्त हो सकते हैं। समीकरण (16) से ऐपेल-फलन F_4 के लिये निम्न विस्तार-सूत्र प्राप्त होता है —

$$F_4(a,\ a';\ b,\ b';\ x, y) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_{r+s}\,(\beta)_{r+s}\ (a)_{r+s}(a')_{r+s}}{(\gamma)_{r+s}\ (\gamma-\alpha-\beta)_{r+s}\ (b)_r\ (b')_s} \cdot \frac{x^r\, y^s}{r!\ s!}$$

$$\times F\left[\begin{array}{c|ccccc|c} 4 & a+r+s, & a'+r+s, & \gamma-\alpha+r+s, & \gamma-\beta & & \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & x, \\ 2 & \gamma+r+s, & \gamma-\alpha-\beta+r+s & & & & y \\ 1 & & b+r;\ b'+s & & & & \end{array}\right] \tag{20}$$

यदि हम (20) में $\gamma=a$ तथा $\gamma-\alpha-\beta=a'$ रखें और सूत्र [4, p. 269] और [4, p. 254] का प्रयोग करें तो हमको दो जैकोबी के गुणनफल का एक रोचक विस्तार-सूत्र प्राप्त होता है :—

$$P_m^{(\lambda,\ \beta)}(x)\ P_m^{(\beta,\ \lambda)}(y) = \frac{(1+\lambda)_m\ (1+\beta)_m}{m!\ m!} \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_{r+s}\ (1+\lambda+\beta+2m-\alpha)_{r+s}}{(1+\lambda)_r\ (1+\beta)_s\, r!\ s!}$$

$$\left[\frac{(1-x)(1+y)}{4}\right]^r \left[\frac{(1+x)(1-y)}{4}\right]^s F_4\Big[\alpha-m,\ 1+\lambda+\beta-\alpha+m+r+s;\ 1+\lambda+r,\ 1+\beta+s;$$
$$\frac{(1-x)(1+y)}{4},\ \frac{(1+x)(1-y)}{4}\Big] \tag{21}$$

समीकरण (14), (15) तथा (17) से ऐपेल-फलनों के इसी प्रकार के विस्तार-सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं।

अब सूत्र [6]

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} o, & o \\ o, & o\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3\end{pmatrix}\end{matrix}\middle| \begin{matrix} \ldots; \ldots \\ c_{p_2}; d_{q_2} \\ e_{p_3}; f_{q_3}\end{matrix} \middle| \begin{matrix} x, \\ y \\ \end{matrix}\right] = G^{n_2, m_2}_{p_2, q_2}\left(x\middle|\begin{matrix}c_{p_2}\\ d_{q_2}\end{matrix}\right) G^{n_3, m_3}_{p_3, q_3}\left(y\middle|\begin{matrix}e_{p_3}\\ f_{q_2}\end{matrix}\right) \tag{22}$$

के समीकरण का (14) में प्रयोग करने से G-फलनों के गुणनफल का निम्न विस्तार-सूत्र प्राप्त होता है :—

$$G^{n_2, m_2}_{p_2, q_2}\left(x\middle|\begin{matrix}c_{p_2}\\ d_{q_2}\end{matrix}\right) \times G^{n_3, m_3}_{p_3, q_3}\left(y\middle|\begin{matrix}e_{p_3}\\ f_{q_3}\end{matrix}\right) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-h)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(h)_{r+s}}{r!\, s!}$$

$$x^r y^s\, S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} 1, & o \\ o, & 1\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2+1, & n_2 \\ p_2-m_2, & q_2-n_2+1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3+1, & n_3 \\ p_3-m_3, & q_3-n_3+1\end{pmatrix}\end{matrix}\middle| \begin{matrix} k-h; k+r+s \\ -r, c_{p_2}-r; d_{q_2}-r, o \\ -s, e_{p_3}-s; f_{q_3}-s, o\end{matrix} \middle| \begin{matrix} x, \\ y \\ \end{matrix}\right] \tag{23}$$

और इसी प्रकार के तीन और सूत्र (14), (15) तथा (16) से प्राप्त हो सकते हैं। (यहाँ पर G-फलन के प्राचलों के लिये भी वही संक्षिप्त संकेत-विधि अपनाई गई है)। आगे समीकरण (23) में G-फलन की विविध विशिष्ट दशाओं [2, p. 215-222] का उपयोग करने पर बहुत से विशिष्ट सूत्रों को प्राप्त किया जा सकता है। इसी प्रकार [6] में दिये गये S-फलन की ज्ञात विशिष्ट दशाओं के (14) से (17) में प्रयोग से बहुत से सूत्र निकल सकते हैं परन्तु संक्षेपण की दृष्टि से हम उनको छोड़ रहे हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० बी० एल० शर्मा के प्रति लेखक अपना आभार प्रदर्शित करना चाहता है जिन्होंने इस कार्य में सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. ऐपेल पी एट डी फेरियेट जे काम्पे। "Fonctions hypergeométriqués et hypersphériqés, polynomes d' Hermite." **गाथियर विलर, पेरिस**, 1926.

2. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य । Higher transcendental Functions, **भाग I**, 1953.

3. पाण्डे, आर० सी० तथा सरन एस० । **प्रोसी० राजस्थान एकेडेमी आफ साइन्सेज, भाग 10, खण्ड** I, 3-13.

4. रेनविले, ई० डी० । Special Functions, **न्यूयार्क** 1960.

5. शर्मा, बी० एल० । **एनेलेज डी ला सोसाइटी साइन्टिफिक डी ब्रूक्सेल्स,** (1965) T-79 I, 26-40.

6. वही । **सेमीनारियो मेटेमेटिको डी बारसिलोना (प्रेस में)**

7. वही । **"दो चर-राशियों का व्यापक फलन" पी० एच० डी० थीसिस (शोध-ग्रन्थ), जोधपुर विश्वविद्यालय** 1964.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 4, October 1970, Pages 191-201

n चरों वाला सार्वीकृत फलन

एस० एस० खाडिया तथा ए० एन० गोयल,
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—अगस्त 26, 1969]

सारांश

इस शोधपत्र में n चरों वाले माइजर का G-फलन दिया गया है। इसके अन्तर्गत एपेल तथा कैम्पे द फेरी के n चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलन विशिष्ट दशाओं के रूप में आये हैं। इसके साथ ही इससे G-प्रकार के समस्त फलन विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं।

Abstract

On the generalised function of 'n' variables. *By* S. S. Khadia and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

This paper gives Meijer's G-function of 'n' variables. This function includes as special cases Appell's, Kampe' de' Feriet's Hypergeometric function of n variables. Besides, it gives rise as particular cases all those functions which are of the G-type.

परिभाषा : सार्वीकृत फलन की परिभाषा करने पर

$$G^{[m,o];\ (m_k,n_k)}_{[p,q];\ (p_k,q_k)}\left[x_k \,\middle|\, [(a_p),(b_q)];\ \{(\overset{k}{c}_{(p_k)}),\ \overset{k}{d}_{(q_k)})\}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{(L_k)}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+\Sigma s_k)}{\prod_{j=1+m}^{p}\Gamma(1-a_j-\Sigma s_k)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\Sigma s_k)}$$

$$\times \prod_k \left\{ \frac{\prod_{j=1}^{m_k} \Gamma(1-c_j^k+s_k) \prod_{j=1}^{nk} \Gamma(d_j^k-s_k)(x_k^{s_k})}{\prod_{j=1+m_k}^{pk} \Gamma(c_j^k-s_k) \prod_{j=1+n_k}^{qk} \Gamma(1-d_j^k+s_k)} (ds_k) \right\} \quad (1)$$

$k=1, 2, \ldots, n$

जहाँ (L_k) उपयुक्त कंटूर है तथा $m, n, p, q, (m_k), (n_k), (p_k)$ तथा (q_k) धन पूर्णांक निम्नांकित असमिकाओं को तुष्ट करते हैं

$$p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ q_k \geqslant 1,\ 0 \leqslant m_k \leqslant p_k,\ 0 \leqslant n_k \leqslant q_k$$

तथा $p+p_k \leqslant q+q_k$

$(x_k)=0$ मानों का वहिष्कार किया गया है। $x_1, x_2 \ldots x_k$ क्रम को (x_k) द्वारा व्यक्त करते हैं।

कंटूर (L_k) (S_k) तल में है और पाशों सहित $-i\infty$ से लेकर $+i\infty$ तक विस्तृत है और आवश्यकता पड़ने पर यह निश्चित रहता है कि $\Gamma(d_j^k-s_k), j=1, 2, \ldots (n_k)$, के पोल कंटूर के दाहिनी ओर और $\Gamma(1-c_j^k+s_k), j=1, 2, \ldots (m_k)$ तथा $\Gamma(a_j+\Sigma s_k), j=1, 2, \ldots m, \ldots$ के पोल के बाईं ओर अवस्थित होंगे।

समाकलों का अभिसरण

अनुभाग 1

समाकल को (S_k) तल में संवृत कंटूर C_k के इर्दगिर्द लेने पर जिससे कि काल्पनिक अक्ष $-iR_k$ से लेकर $+iR_k$ तक हो जिसमें R_k वृहद् हो और अर्द्धवृत्त $|S_k|=R_k$ का वह अंश हो जो काल्पनिक अक्ष R_k के बाईं ओर स्थित हो और इस प्रकार चुना गया हो कि वृत्त सदैव समाकल्य के पोलों के मध्य से होकर गुजरता हो।

हमें एर्डेल्यी (1, p. 3) एवं मैकरोबर्ट (2, p. 374) के सूत्रों की आवश्यकता होगी :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi c_0 \operatorname{cosec} \pi z \quad (2)$$

यदि $|arg\ z| \leqslant \pi-\delta$, δ ऐसी धन संख्या है कि $0<\delta<\pi$,

$$|\Gamma(z+v)| \leqslant M|z|^{g-1/2} \exp\{x \log |z| - y\ arg\ z - x\} \quad (3)$$

जहाँ $z=x+iy$, M धनात्मक अचर है जो z से मुक्त है और $g=R(v)$ माना कि $F(S_k)$ (1) में समाकल्य के गुणकों को बतावे जिसमें S_k तथा $\Sigma S_k(S_1, S_2, S_3, \ldots S_{k-1})$ ही अचर हों। सूत्र (2) का व्यवहार करने पर

$$|F(S_k)| = \left| \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j+\Sigma s_k) \prod_{j=1}^{pk} \Gamma(1-\overset{k}{c_j}+s_k) \prod_{j=1+m}^{p} \sin \pi(1-a_j-\Sigma s_k)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j+\Sigma s_k) \prod_{j=1}^{qk} \Gamma(1-\overset{k}{a_j}+s_k) \prod_{j=1}^{nk} \sin \pi(\overset{k}{a_j}-s_k)} \right.$$

$$\left. \times \frac{\prod_{j=1+mk}^{pk} \sin \pi(\overset{k}{c_j}-s_k)}{(\pi)^{p-m+p_k-m_k-n_k}} x_k^{s_k} \right| \quad (4)$$

$|S_k|$ को दीर्घ मानते हुए तथा $|\arg S_k| < \pi - S_k$, यदि $S_k = R_k e^{i\theta k}$, $x_k = r_k e^{i\phi_k}$ एवं $S_k = \xi_k + i\eta_k$, तो (4) के बल पर हमें .

$$\text{(i)} \quad \left| \prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j+\Sigma s_k) \right| \leqslant M R_k^{\sum_{j=1}^{p} R(a_j+\Sigma s_D)-\frac{1}{2}p} \exp\{-\xi_k+\xi_k \log R_k - \eta_k \theta_k\} p \quad (5)$$

$$\text{(ii)} \quad \left| \prod_{j=1}^{pk} \Gamma(1-\overset{k}{c_j}+s_k) \right| \leqslant \overset{k}{M_1} R_k^{\sum_{j=1}^{pk} R(1-\overset{k}{c_j})-\frac{1}{2}p_k} \exp\{-\xi_k+\xi_k \log R_k - \eta_k \theta_k\} p_k \quad (6)$$

$$\text{(iii)} \quad \left| \prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j+\Sigma s_k) \right| \leqslant \overset{k}{M_2} R_k^{\sum_{j=1}^{q} R(b_j+\Sigma s_D)-\frac{1}{2}q} \exp\{-\xi_k+\xi_k \log R_k - \eta_k \theta_k\} q \quad (7)$$

$$\text{(iv)} \quad \left| \prod_{j=1}^{qk} \Gamma(1-\overset{k}{d_j}+s_k) \right| \leqslant \overset{k}{M_3} R_k^{\sum_{j-1}^{qk} R(1-\overset{k}{a_j})-\frac{1}{2}q_k} \exp\{-\xi_k+\xi_k \log R_k - \eta_k \theta_k\} q_k \quad (8)$$

$$\text{(v)} \quad \left| \prod_{j=1+m}^{p} \sin \pi(1-a_j-\Sigma s_k) \right| \leqslant e^{|\eta_k|(p-m)\pi} \quad (9)$$

$$\text{(vi)} \quad \left| \prod_{j=1+m_k}^{pk} \sin \pi(\overset{k}{c_j}-s_k) \right| \leqslant e^{|\eta_k|(p_k-m_k)\pi} \quad (10)$$

तथा

$$\text{(vii)} \quad \left| \prod_{j=1}^{nk} \sin \pi(\overset{k}{d_j}-s_k) \right| \leqslant e^{|\eta_k| n_k \pi} \quad (11)$$

$$(D=1, 2, \ldots, n; D \neq k)$$

प्राप्त होगा

(4) में (5) से (11) तक का प्रयोग करने पर थोड़े सरलीकरण के अनन्तर

$$|F(s_k)| \leqslant M \prod_{k=1}^{n} R_k^{\sigma k} \exp\Big[\sum_{k=1}^{n} (p-q+p_k-q_k)\{\xi_k(\log R_k-1)-\eta_k\theta_k\}$$

$$+|\eta_k|(p-m+p_k-m_k-n_k)\pi+\xi_k \log \xi_k-\eta_k\phi_k\Big] \tag{12}$$

प्राप्त होगा जिसे और आगे सरल करने पर

$$|F(s_k)| \leqslant M \prod_{k=1}^{n} R_k^{\sigma k} \exp\Big[\sum_{k=1}^{n} (p-q+p_k-q_k)\{\xi_k(\log R_k-1)+|\eta_k|(\pi\pm\theta_k)\}$$

$$+\xi_k \log r_k-|\eta_k|\{(m+m_k+n_k-q-q_k)\pi\pm\phi_k\}\Big] \tag{13}$$

प्राप्त होगा जिसमें M तथा σ ऐसी संख्यायें हैं जो S_k, $\xi_k=R_k \cos\theta_k$ तथा $M_k=R_k \sin\theta_k$ से पूर्ण स्वतन्त्र हैं।

अब वृत्त $|S_k|=R_k$, के एक अंश के चारों ओर लिये गये समाकल पर विचार करेंगे, जो S_k तल पर काल्पनिक अक्ष के दाईं ओर अवस्थित है और R_k दीर्घ है।

(a) कल्पना की कि $p+p_k<q+q_k$, यदि $0\leqslant|\theta_k|\leqslant\pi/4$

जिससे $\xi_k=R_k \cos\theta_k \geqslant \frac{R_k}{\sqrt{2}}$ यदि $|\arg x_k|<(m+m_k+n_k-q-q_k)\pi$ तो

$$|F(s_k)| \leqslant M \prod_{k=1}^{n} R_k^{\sigma k} \exp\left[(p+p_k-q-q_k)(\log R_k-1)\, R_k/\sqrt{2}+R_k|\log \xi_k|\right] \tag{14}$$

अतः α कोई परिमित संख्या होने से, $|S_k^{\alpha} F(s_k)|$ सतत शून्य की ओर प्रवृत्त होता है जैसे-जैसे R_k अनन्त की ओर अग्रसर होता है।

(b) कल्पना की कि $p+p_k<q+q_k$, यदि $\pi/4\leqslant|\theta_k|\leqslant\pi/2$

तथा R_k पर्याप्त दीर्घ हो कि $|\eta_k|=R_k \sin|\theta_k| \geqslant \frac{\theta_k}{\sqrt{2}}$, यदि $|\arg x_k|<(m+m_k+n_k-q-q_k)\pi$ तो

$$|F(s_k)| \leqslant M \prod_{k=1}^{n} R_k^{\sigma k} \exp\left[-\frac{R_k}{\sqrt{2}}\{(m+m_k+n_k-q-q_k)\pi\pm\phi_k\}\right] \tag{15}$$

अतः α कोई भी परिमित संख्या होने से $|S_k^{\alpha} F(S_k)|$ सतत शून्य की ओर प्रवृत्त होता है ज्यों-ज्यों R_k अनन्त की ओर अग्रसर होता है।

(c) माना कि $p+p_k=q+q_k$ यदि $0\leqslant|\theta_k|\leqslant\pi/4$

जिससे कि $\xi_k=R_k\cos\theta_k\geqslant R_k|\sqrt{2}$ तथा r_k को इकाई से कम रखना होगा जिससे $\xi_k\log\xi_k\leqslant 0$ तो

$$|F(s_k)|\leqslant M\prod_{k=1}^{n} R_k^{\sigma k}\ \exp\left[-\frac{R_k}{\sqrt{2}}\log(1/r_k)\right] \tag{16}$$

अतः α कोई परिमित संख्या होने से $|S_k^{\alpha}F(s_k)|$ शून्य की ओर प्रवृत्त होता है ज्यों ज्यों R_k अनन्त की ओर अग्रसर होता है।

(d) माना कि $p+p_k=q+q_k$ यदि $\pi/4\leqslant|\theta_k|\leqslant\pi/2$ जिससे $|\eta_k|=R_k\sin|\theta_k|\geqslant\dfrac{R_k}{\sqrt{2}}$ तथा $|arg\,x_k|<(m+m_k+n_k-q-q_k)\pi$

r_k को इकाई से कम लेना होगा, जिससे कि $\xi_k\log r_k\leqslant 0$ तो

$$|F(s_k)|\leqslant M\prod_{k=1}^{n} R_k^{\sigma k}\ \exp\left[\left[-\frac{R_k}{\sqrt{2}}\{(m+m_k+n_k-q-q_k)\pi\pm\phi_k\}\right]\right. \tag{17}$$

अतः α कोई परिमित संख्या होने से $|S_k^{\alpha}\ F(s_k)|$ सतत शून्य की ओर प्रवृत्त होता है जैसे ही R_k अनन्त की ओर अग्रसर होता है।

उपर्युक्त दशाओं से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि यदि

(i) $p+p_k<q+q_k$ तथा $|arg\,x_k|<(m+m_k+n_k-q-q_k)\pi$,

तो अर्द्धवृत्त के चारों ओर समाकल शून्य की ओर प्रवृत्त होगा यदि R_k अनन्त की ओर अग्रसर हो

(ii) $p+p_k<q+q_k$

तथा $$|\,arg\ x_k\,|<(m+m_k+n_k-q-q_k)\pi$$

तो अर्द्धवृत्त के चारों ओर समाकल शून्य की ओर प्रवृत्त होगा यदि R_k अनन्त की ओर अग्रसर हो, और यदि $|\,x_k\,|=\xi_k=1$

अनुभाग 2

इस अनुभाग में हम संवृत कंटूर c_k' के चारों ओर लिये गये s_k तल में समाकल पर विचार करेंगे। संवृत कंटूर $-ie^{-i\psi_k}R_k'$ से प्रारम्भ होता है और $+ie^{i\psi_k}R^1{}_k$ पर अन्त होता है जिसमें

$0<\psi_k<\pi/2$ तथा R_k' दीर्घ है। कंटूर का बाकी भाग एक वृत्त $|S_k|=R'_k$ का अंश रूप होता है जो $ie^{i\psi_k}R'_k$ से लेकर $-ie^{-i\psi_k}$ तक काल्पनिक अक्ष के बाईं ओर रहता है। R_k' का चुनाव इस प्रकार हुआ रहता है कि वृत्त सदैव समाकल के पोलों से होकर गुजरता है। सरलता के लिये S_k को $-S_k$ द्वारा प्रतिस्थापित कर देते हैं, जिससे जब S_k दीर्घ हो तो

$$|F(-S_k)|\leqslant M_1^{k} R'^{\mu_k}_k \exp [q+q_k-p-p_k)\{\xi_k(\log R_k'-1)+|\eta_k|(\pi\pm\theta_k)\}$$

$$-\xi_k \log r_k+|\eta_k|\{(p+p_k-m-m_k-n_k)\pi\pm\phi_k\}] \qquad (18)$$

जहाँ M_1^{k} तथा μ_k सदस्य S_k से मुक्त हैं और $\xi_k=R_k'\cos\theta_k$ तथा $\eta_k=R_k'\sin\theta_k$.

अनुभाग 1 की ही भाँति आगे बढ़ने पर हमें निम्नांकित फल प्राप्त होते है :–

(i) यदि $p+p_k>q+q_k$ तथा $|arg\, x_k|<(m+m_k+n_k-p-p_k)\pi$, तो अर्द्धवृत्त के चारों ओर का समाकल शून्य होगा जब R_k' अनन्त तक अग्रसर होता है।

(ii) साथ ही, यदि $p+p_k=q+q_k$ तथा $|arg\, x_k|<(m+m_k+n_k-p-p_k)\pi$ तो अर्धवृत्त के इर्द-गिर्द का समाकल शून्य होगा जब R_k' अनन्त तक अग्रसर होता है। प्रतिबन्ध यह है कि $|x_k|=r_k>1$.

अनुभाग 3

समाकल (2) को लेने पर $-i\infty$ से लेकर $i\infty$, का कंटूर जब $|\eta_k|=R_k$ दीर्घ हो, $\xi_k=0$, $\theta_k=\pm\pi/2$, तो (14) से हमें

$$|F(s_k)|\leqslant M\prod_{k=1}^{n} R_k^{\sigma k} \exp\left[-R_k\left\{\left(m+m_k+n_k-\frac{p}{2}-\frac{p_k}{2}-\frac{q}{2}-\frac{q_k}{2}\right)\pi\pm\phi_k\right\}\right] \qquad (19)$$

प्राप्त होगा अतः इससे यह अनुगमित होता है कि समाकल x_k का वैश्लेषिक फलन है, यदि

$$|arg\, x_k|<\left(m+m_k+n_k-\frac{q}{2}-\frac{q_k}{2}-\frac{p}{2}-\frac{p_k}{2}\right)\pi$$

तथा
$$2(m+m_k+n_k)>q+q_k+p_k+p_k \qquad (20)$$

इस प्रकार यह देखा जाता है कि पारिभाषित समाकल (1) x_k का वैश्लेषिक फलन है, यदि

$$|arg\, x_k|<\left(m+m_k+n_k-\frac{q}{2}-\frac{q_k}{2}-\frac{p}{2}-\frac{p_k}{2}\right)\pi$$

तथा

$$2(m+m_k+n_k)>q+q_k+p+p_k \tag{21}$$

समाकलों का मूल्यांकन

परिभाषित समाकल (1) का मान n चरों वाली हाइपरज्यामितीय श्रेणी के रूप में अवशेषों के योगफल की भाँति, प्राचलों (x_k) पर कुछ प्रतिबन्ध के अन्तर्गत निकाला जा सकता है।

माना n कि चरों वाले सार्वीकृत फलन के अवयव निम्नांकित प्रतिबन्धों को पूरा करते है :

$$\overset{k}{c_j}-\overset{k}{d_h}\neq 1, 2, 3, \ldots \qquad (j=1, \ldots m_k;\ h=1, \ldots n_k) \tag{22}$$

$$a_j+\sum_{k=1}^{n} \overset{k}{d_h}\neq 0, -1, -2, \ldots \qquad (j=1, \ldots p_j h=1, \ldots n_k) \tag{23}$$

यदि $n_i \geqq 0$, तो

$$\overset{k}{d_j}-\overset{k}{d_h}\neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ (j=1, \ldots n_k;\ h=1,, \ldots n_k; j\neq h) \tag{24}$$

यदि $\qquad p+p_k<q+q_k, \, |\arg x_k|<(m+m_k+n_k-q-q_k)\,\pi$

तथा कंटूर (L_k) दोनों सिरों पर दाहिनी ओर मुड़े हों तो समाकल कंटूरों (L_k) के दाईं ओर के पोलों पर अवशेषों के योगफल के तुल्य होगा।

इस प्रकार

$$G^{[m,o];\,(m_k,n_k)}_{[p,q];\,(p_k,q_k)}\left[(x_k)\,\middle|\,[(a_p),(b_q)];\,\{(\overset{k}{c}_{(p_k)}),\ (\overset{k}{d}_{(q_k)})\}\right]$$

$$=\sum_{(\mu_k)=1}^{lk}\prod_{k=1}^{n}\left\{(x_k)^{\overset{k}{d}_{uk}}\right\}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+\Sigma\overset{k}{d}_{uk})}{\prod_{j=1+m}^{p}\Gamma(1-a_j-\Sigma\overset{k}{d}_{uk})\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\Sigma\overset{k}{d}_{uk})}$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{mk}\Gamma(1-\overset{k}{c_j}+\overset{k}{d}_{uk})\prod_{j=1}^{lk}\Gamma(\overset{k}{d_j}-\overset{k}{d}_{uk})}{\prod_{j=1+m_k}^{pk}\Gamma(\overset{k}{c_j}-\overset{k}{d}_{uk})\prod_{j=1+l_k}^{qk}\Gamma(1-\overset{k}{d_j}+\overset{k}{d}_{u_k})}\right.$$

$$\times F\left[\begin{array}{l|l|l} p & a_1+\Sigma \overset{k}{d}_{uk}, \ldots\ldots\ldots, a_p+\Sigma \overset{k}{d}_{uk} & x_1(-1)^{p+p_1-m-m_1-l_1} \\ p_1 & 1-\overset{1}{c}_1+\overset{1}{d}_{u_1}, \ldots\ldots\ldots, 1-\overset{1}{c}_{p_1}+\overset{1}{d}_{u1} & x_2(-1)^{p+p_2-m-m_2-l_2} \\ \vdots & & \\ p_n & 1-\overset{n}{c}_1+\overset{n}{d}_{u_n}, \ldots\ldots\ldots, 1-\overset{n}{c}_{p_n}+\overset{n}{d}_{u_n} & ----- \\ q & b_1+\Sigma \overset{k}{d}_{u_k}, \ldots\ldots\ldots, b_q+\Sigma \overset{k}{d}_{k_n} & - \quad --- \\ q_1-1 & 1+\overset{1}{d}_1+\overset{1}{d}_{u_1}, \ldots * \ldots, 1-\overset{1}{d}_{q_1}+\overset{1}{d}_{u_1} & - \quad - \quad - \\ \vdots & & \\ q_n-1 & 1+\overset{n}{d}_1+\overset{n}{d}_{n_n}, \ldots * \ldots, 1+\overset{n}{d}_{q_n}+\overset{n}{d}_{u_n} & x_n(-1)^{p+p_n-m-m_n-l_n} \end{array}\right] \tag{25}$$

नारों से यह विदित होता है कि $1-\overset{1}{d}_{u_1}+\overset{1}{d}_{u_1}$, $1-\overset{2}{d}_{u_2}+\overset{2}{d}_{u_2}$ ......, $1-\overset{n}{d}_{un}+\overset{n}{d}_{u_n}$ संख्याओं को

$$1-\overset{1}{d}_1+\overset{1}{d}_{u_1}, \ldots\ldots, 1-\overset{1}{d}_{u_1}+\overset{1}{d}_{u_1} \ldots\ldots, 1-\overset{1}{d}_{q_1}+\overset{1}{d}_{u_1}$$

$$1-\overset{2}{d}_1+\overset{2}{d}_{u_2}, \ldots\ldots, 1-\overset{2}{d}_{u_2}+\overset{2}{d}_{u_2}, \ldots\ldots, 1-\overset{2}{d}_{q_2}+\overset{2}{d}_{q_2},$$

... ...

... ...

तथा $1-\overset{n}{d}_1+\overset{n}{d}_{u_n}$, ... $1-\overset{n}{d}_{u_n}+\overset{n}{d}_{u_n}$, ... $1-\overset{n}{d}_{q_n}+\overset{n}{d}_{u_n}$ अनुक्रम में से क्रमशः छोड़ देना होगा

उपर्युक्त F फलन से निम्नांकित श्रेणी प्रदर्शित होती हैं :

$$\sum_{(\nu_n^-)=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j+\Sigma \overset{k}{d}_{u_k})_{\Sigma\nu_k}}{\prod_{j=1}^{q}(b_j+\Sigma \overset{k}{d}_{u_k})_{\Sigma\nu_k}} \prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{pk}(1-\overset{k}{c}_j+\overset{k}{d}_{u_k})_{\nu_k}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\nu_k}}^{q}(1-\overset{k}{d}_j+\overset{k}{d}_{n_k})_{\nu_k}}\, x_k(-1)^{p-m+p_k-m_k-n_k}\cdot\frac{1}{\nu_k!}\right\}. \tag{26}$$

यदि $p+p_k=q+q_k$ तथा $|x_k|=r_k<1$, तो हार्न की विधि [1, p. 227] का अनुगमन करने से अभिसरण-वक्र का समीकरण

$$\sum_{k=1}^{n}(r_k)^{1/p-q}=1 \tag{27}$$

यदि $p+p_k<q+q_k$, $|x_k|=r_k$ (r_k धन हो) तो (25) एक समाकल फलन होगा। (25) से यह स्पष्ट है कि n चरों वाला सार्वीकृत फलन कई मानों का (x_k') का फलन है जिसका प्रशाख विन्दु $(x_k)=0$ है।

वैश्लेषिक संतति

हमारे द्वारा प्राप्त सार्वीकृत फल की वैश्लेषिक संतति n चरों वाली हाइपरज्यामितीय श्रेणी के रूप में सम्भव नहीं प्रतीत होती। फिर भी इसकी कुछ विशिष्ट दशाओं में वैश्लेषिक संतति n चरों वाली हाइपरज्यामितीय श्रेणी के रूप में होती है जिसके तर्क हैं

$$\text{(i)} \left(\frac{1}{(x_n)}\right), \quad \text{(ii)} \left(x_1, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right), \quad \text{(iii)} \left(\frac{x_1}{x_2}, x_2, x_3, \ldots, x_n\right) \text{ इत्यादि।}$$

ऐसी दशा पर विचार करें जब कंटूर (L_k) दोनों सिरों पर काल्पनिक अक्ष के बाईं ओर समाकल्य के पोलों को काटे बिना मुड़े होंगे।

यदि $p+p_k>q+q_k$ तथा $|arg\, x_k|<(m_k+n_k-p-p_k)\pi$ तो समाकल का मान कंटूर (L_k) के बाईं ओर के पोलों पर अवशेषों के योगफल के बराबर होगा।

$$G^{[o,o];\,(m_k,n_k)}_{[p,q];\,(p_k,q_k)}\left[(x_k)\,\middle|\,[(a_p),\,(b_q)]:\{(\overset{k}{c}_{(p_k)}),\,(\overset{k}{d}_{(q_k)})\}\right]$$

$$=\sum_{(u_k)=1}^{mk}\prod_{k=1}^{n}\left\{x_k^{(\overset{k}{c}_{u_k}-1)}\right\}\times\frac{1}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(n+1-a_j-\Sigma\overset{k}{c}_{u_k})\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\Sigma\overset{k}{c}_{u_k}-n)}$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{mk}\Gamma(\overset{k}{c}_{u_k}-\overset{k}{c}_j)\prod_{j=1}^{nk}\Gamma(1-\overset{k}{c}_{u_k}+\overset{k}{d}_j)}{\prod_{j=1+m_k}^{pk}\Gamma(1-\overset{k}{c}_{u_k}+\overset{k}{c}_j)\prod_{j=1+m_k}^{qk}\Gamma(\overset{k}{c}_{u_k}-\overset{k}{d}_j)}\right\}$$

$$\times\left[\begin{array}{l|l|l}
q & (n+1)-b_1-\Sigma\overset{k}{c}_{u_k},\,\ldots\ldots,(n+1)-b_q-\Sigma\overset{k}{c}_{u_k} & \frac{1}{x_1}(-1)^{q+q_1-m_1-n_1}\\
q_1 & 1+\overset{1}{d}_1-\overset{1}{c}_{u_1},\,\ldots\ldots\ldots\ldots,\,1+\overset{1}{d}_{q1}-\overset{1}{c}_{u_1} & \frac{1}{x_2}(-1)^{q+q_2-m_2-n_2}\\
\vdots & & \\
q_n & 1+\overset{n}{d}_1-\overset{n}{c}_{u_n},\,\ldots\ldots\ldots,\,1+\overset{n}{d}_{q_n}-\overset{n}{c}_{u_n} & \\
p & (n+1)-a_1-\Sigma\overset{k}{c}_{u_k},\,\ldots,\,(n+1)-a_p-\Sigma\overset{k}{c}_{u_k} & \\
p_1-1 & 1+\overset{\prime}{c}_1-c_{u_1},\,\cdots*\cdots,\,1+\overset{\prime}{c}_{p_1}-\overset{1}{c}_{u_1} & \\
\vdots & & \\
p_n-1 & 1+\overset{n}{c}_1-\overset{n}{c}_{u_n},\,\cdots*\cdots,\,1+\overset{n}{c}_{p_n}-\overset{u}{c}_{n_n} & \frac{1}{x_n}(-1)^{q+q_n-m_n-n_n}
\end{array}\right] \quad (28)$$

प्रयुक्त तारे व्यक्त करते हैं कि संख्यायें

$$1+\overset{1}{c}_{u_1}-\overset{1}{c}_{u_1}, 1+\overset{2}{c}_{u_2}-\overset{2}{c}_{u_2}, \ldots, \text{ तथा } 1+\overset{n}{c}_{u_n}-\overset{n}{c}_{u_n}$$

अनुक्रम में से क्रमशः छोड दी जानी हैं।

$$1+\overset{1}{c}_1-\overset{1}{c}_{u_1}, \ldots\ldots 1+\overset{1}{c}_{u_1}-\overset{1}{c}_{u1}, \ldots 1+\overset{1}{c}_{u_1}-\overset{1}{c}_{u1}$$

$$1+\overset{2}{c}_1-\overset{2}{c}_{u_2}, \ldots\ldots 1+\overset{2}{c}_{u_2}-\overset{2}{c}_{u_2}, \ldots 1+\overset{2}{c}_{p_2}-\overset{2}{c}_{u_2}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$1+\overset{k}{c}_1-\overset{n}{c}_{u_k}, \ldots 1+\overset{k}{c}_{u_k}-\overset{k}{c}_{u_k}, \ldots 1+\overset{k}{c}_{p_k}-\overset{k}{c}_{u_k}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$1+\overset{n}{c}_1-\overset{n}{c}_{u_n}, \ldots\ldots, 1+\overset{n}{c}_{u_n}-\overset{n}{c}_{u_n}, \ldots 1+\overset{n}{c}_{p_n}-\overset{n}{c}_{u_n}$$

यदि $p+p_k=q+q_k$ तथा $|x_k|=r_k>1$, तो हार्न की विधि [1, p. 227] का प्रयोग करने पर हमें

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(r_k)^{q-p}}=1 \tag{29}$$

के रूप में अभिसरण वक्र प्राप्त होगा।

अवकल सकीकरण

सार्वीकृत फलन द्वारा निम्नांकित आंशिक अवकल समीकरणों की तुष्टि होती है :

$$\Big[(-1)^{p+p_k-m-m_k-n_k}\, x_k \prod_{j=1}^{p} (\Sigma\theta_k+a_j-1) \prod_{j=1}^{pk} (\theta_k-\overset{k}{c_j}+1)-\prod_{j=1}^{q} (b_j+\Sigma\theta_k-1)$$

$$\prod_{j=1}^{qk} (\theta_k-\overset{k}{d_j})\Big]\, w=0. \tag{30}$$

जहाँ w द्वारा समीकरण के दाहिनी ओर का और (θ_n) द्वारा क्रमशः $x_1 \frac{\partial}{dx_1}, \ldots$ तथा $x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ का बोध होता है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Higher Transcedental functions, भाग I, 1953.
2. मैक्रोबर्ट, टी० एम० । Functions of a Complex Variables. 5वाँ संस्करण, 1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 13, No. 4, October, 1970, Pages 203-204

हाइपर-ज्यामितीय फलनों के गुणनफल के लिए फूरियर श्रेणी

ए० डी० वाधवा

गणित विभाग, कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र

[प्राप्त—दिसम्बर 3, 1969]

सारांश

इस टिप्पणी में दो हाइपरज्यामितीय फलनों के गुणनफल के लिए एक फूरियर श्रेणी प्राप्त की गई है।

Abstract

A Fourier series for the product of hypergeometric functions. *By* A.D. Wadhwa, Department of Mathematics, Kurukshetra University, Kurukshetra.

In this note a Fourier series for the product of two hypergeometric functions has been obtained.

1. भूमिका—इस टिप्पणी में दो हाइपरज्यामितीय फलनों के गुणनफल के लिए फूरियर श्रेणी की स्थापना काम्पे द फेरी फलनों तथा कोज्या फलनों के गुणनफल की श्रेणी के रूप में की गई है।

उपपत्ति के लिये निम्नांकित सूत्र की आवश्यकता होगी :

$$\int_0 \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{\alpha} (\cos nt)\, {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_i \\ b_j \end{matrix}\middle|\, a \cos^2 (t/2)\right] {}_PF_Q\left[\begin{matrix} A_I \\ B_J \end{matrix}\middle|\, b \cos^2 (t/2)\ \right]$$

$$= \frac{\pi \Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha}\Gamma(1+n+\frac{1}{2}\alpha)}\, F\left[\begin{matrix} \frac{1+\alpha}{2}, 1+\frac{1}{2}\alpha; a_i: A_I; \\ 1+n+\frac{1}{2}\alpha, b_j; B_J; \end{matrix}\ a, b\ \right] \quad (1\cdot1)$$

$Re(\alpha) > -1,\ p \leqslant q,\ P \leqslant Q,$

जो [1, p. 105, (3)] से निकलता है।

2. फूरियर श्रेणी—जिस फूरियर श्रेणी की स्थापना करना है वह है

$$\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\alpha} {}_pF_q\left[\begin{matrix}a_i\\b_j\end{matrix}\middle| a\cos^2(t/2)\right] {}_PF_Q\left[\begin{matrix}A_I\\B_J\end{matrix}\middle| p\cos^2 t/2\right]$$

$$=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha-1}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(1+r+\frac{1}{2}\alpha)} F\left[\begin{matrix}\frac{1+\alpha}{2},\ 1+\frac{1}{2}\alpha:\ a_i;\ A_I;\\ 1+r+\frac{1}{2}\alpha:\ b_j;\ B_J\end{matrix}\ a,\ b\right]\cos rt \tag{2·1}$$

$Re(\alpha)>-1,\ p\leqslant q,\ P\leqslant Q,\ 0\leqslant t\leqslant\pi.$

उपपत्ति : माना कि

$$F(t)=\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\alpha} {}_pF_q\left[\begin{matrix}a_i\\b_j\end{matrix}\middle| a\cos^2(t/2)\right] {}_PF_Q\left[\begin{matrix}A_I\\B_J\end{matrix}\middle| b\cos^2(t/2)\right]=\sum_{r=0}^{\infty}C_r\cos rt. \tag{2·2}$$

समीकरण (2·2) न्यायसंगत है क्योंकि $F(t)$ सतत है और $(0, \pi)$ अन्तराल में सीमित विचरणयुक्त है ।

(2·2) के दोनों ओर $\cos nt$ से गुणा करने तथा 0 से π के बीच t के सापेक्ष समाकलित करने पर

$$\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\alpha}\cos nt\ {}_pF_q\left[\begin{matrix}a_i\\b_j\end{matrix}\middle| a\cos^2(\tfrac{1}{2}t)\right] {}_PF_Q\left[\begin{matrix}A_I\\B_J\end{matrix}\middle| b\cos^2(t/2)\right]dt$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}C_r\int_0^{\pi}\cos rt\cos nt\,dt$$

अब (1·1) तथा कोज्या फलनों के लाम्बिकता गुण का उपयोग करने पर

$$C_n=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2^{\alpha-1}\Gamma(1+n+\frac{1}{2}\alpha)} F\left[\begin{matrix}(1+\alpha)/2,\ 1+\frac{1}{2}\alpha:\ a_i;\ A_I\\ 1+n+\frac{1}{2}\alpha:\ b_j;\ B_J;\end{matrix}\ a,\ b\right] \tag{2·3}$$

(2·2) तथा (3.2) से फल (2·1) की प्राप्ति होती है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० एस० डी० बाजपेयी का उदार पथ-प्रदर्शन के हेतु एवं प्रोफेसर एस० डी० चोपड़ा का सुवधायें प्रदान करने के हेतु आभारी है ।

निर्देश

1. सक्सेना, आर०के० तथा व्यास, आर० सी० । **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका,** 1968, **11,** 103-107.

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।
2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिए तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व में संशोधन के लिए उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये दो रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $K_4Fe(CN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये गये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिए कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सके।
7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टिल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिए। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिए। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार हो कर आने चाहिए। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
8. लेखों में निर्देश (References) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
   पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
   फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०। **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।
9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिण्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।
10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, प्रयाग"**, इस पते पर आने चाहिए। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जायँगे।

प्रबंध सम्पादक